Interrogation n°20 bis. *Barème sur 20 pts*

Exercice A. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace euclidien de dimension n et dont on note $< \ , \ >$ le produit scalaire.

1) a) [1 pt] Montrer qu'il existe une unique application $v : E \to E$ $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall (x,y) \in E \times E \ , \ \langle v(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

b) [1 pt] Montrer que v est linéaire.

c) [0 pt] L'endomorphisme v ainsi défini est appelé adjoint de u, et noté $v = u^T$. Que dire de v^T ?

2) [1 pt] Soit F un sev de E. Montrer que F est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par v.

Exercice B. Séries et intégrales de fonctions à plusieurs variables (★)

1) [2.5 pts] Soit $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}$ $(t,x,y) \longmapsto f(t,x,y)$ de classe C^1.

On considère $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $J(x,y) = \int_0^1 f(t,x,y)\, dt$. Montrer que J est de classe C^1.

2) [2 pts] Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $\sum \sup_{[0,1]^2} |f_n|$ converge.

On considère $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $S(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x,y)$. Montrer que S est continue.

Exercice C. Variable aléatoire à valeurs vectorielles

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ une v.a. à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

On suppose que $E(\|X\|^2) < +\infty$ et $E(X) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i) = 0$.

1) [1.5 pt] Pour $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $Y_v = \langle v, X \rangle$.

Montrer que $E(Y_v) = 0$ et exprimer $E((Y_v)^2)$ en fonction des v_i et des $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

2) [1 pt] On considère la matrice symétrique $M = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Montrer que M est positive, c'est-à-dire $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, Mv \rangle \geq 0$.

3) [1.5 pt] Exprimer $\sup_{\|v\|=1} E((Y_v)^2)$ en fonction des valeurs propres de M.

4) [1.5 pt] Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les n variables aléatoires réelles Y_v, pour $v \in \mathcal{B}$, sont deux à deux non corrélées.

Exercice D. Loi faible et loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables réelles indépendantes $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, et de même loi que X.

On pose $\boxed{Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n}$.

On suppose $E(X) = 0$ et $E(X^4) < +\infty$, c'est-à-dire X d'espérance nulle et de moment d'ordre 4 fini.

1) [1 pt] Montrer que X^2 et X^3 sont d'espérance finie. Pour la suite, on pose $K = E(X^2)$ et $L = E(X^4)$.

2) [1 pt] *Loi faible des grands nombres (propriété en fait au programme)*

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{K}{n\varepsilon^2}$.

3) *Loi forte des grands nombres (propriété hors-programme)*

a) [1 pt] Déterminer le nombre N de quadruplets $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$ composés de deux paires distinctes de termes égaux (comme par exemple $(3, 3, 1, 1)$ ou $(1, 3, 3, 1)$ ou encore $(2, 5, 2, 5)$).

b) [1 pt] Exprimer $E(Y_n^4)$ à l'aide de K, L et n. On en déduit $E(Y_n^4) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) [1 pt] Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $P(|Y_n| \geq \varepsilon) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

d) [1 pt] On pose $\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}, A_{\varepsilon,m} = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \geq m, |Y_n(\omega)| < \varepsilon\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{m\to+\infty} P(\overline{A_{\varepsilon,m}}) = 0$.

e) [1 pt] On pose $B = \left\{\omega \in \Omega \mid \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, m \in \mathbb{N},\ \forall n \geq m,\ \ |Y_n(\omega)| < \dfrac{1}{k}\right\}$.

Montrer que $P(B) = 1$.

Remarque culturelle : Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = 0$ presque sûrement. De façon générale, si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires telle que $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n \geq \varepsilon) < +\infty$, alors $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire que $\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty}\ Y_n(\omega) = 0\}$ est presque sûr.