Interrogation n$^{\text{o}}$20. Corrigé

Exercice A

1) a) T est bien définie car A_1 est l'univers entier.

T est une v.a., car $(T > k) = A_k$ est bien un événement.

b) Pour $k \geq n+1$, $P(T > k) = 0$.

Pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $P(T > k) = \prod_{j=1}^{k} P(A_j \mid A_{j-1})$ par la formule de l'intersection.

Donc $P(T > k) = \prod_{j=1}^{k} \dfrac{n-j+1}{n} = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$.

Remarque : On peut aussi utiliser $P(T > k) = \dfrac{\text{nombre de } k\text{-uplets injectifs dans } E}{\text{nombre de } k\text{-uplets dans } E}$.

Donc $E(T) = \sum_{k=0}^{n} P(T > k) = (n!) \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n^k (n-k)!} = (n!) \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n^k k!}$ par changement de variable.

2) On a $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{x^k}{n^k} e^{-x}$, donc $I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{k!}{n^k} = \dfrac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$.

Remarque : Le changement de variable $x = \sqrt{n}t$ donne le résultat souhaité.

3) a) $\forall t \in [0, +\infty[$, $f_n''(t) = \dfrac{-1}{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2} \leq \dfrac{-1}{(1+t)^2} = f_1''(t)$, car $\left(1 + \dfrac{t}{\sqrt{n}}\right) \leq (1+t)$.

b) Comme $f_n(0) = f_n'(0) = 0$ de de même pour f_1, alors en intégrant deux fois l'inégalité du a), on obtient $f_n''(t) \leq f_1''(t)$, et on conclut en composant par exp (qui est croissante).

4) Posons $F_n(t) = \left(1 + \dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t}$.

Pour tout $t \in [0, +\infty[$ fixé, on a : $n \ln \left(1 + \dfrac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}t - \dfrac{1}{2}t^2 + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc $F_n(t) = \exp\left(-\dfrac{1}{2}t^2 + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \to \exp\left(-\dfrac{1}{2}t^2\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

D'autre part, par 3), $F_n(t) \leq F_1(t) = (1+t)\, e^{-t}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On en conclut par convergence dominée que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} F_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt$.

Exercice B

1) Par continuité de φ' en 0, il existe $a > 0$ tel que φ' est positive sur $[0, a]$.

Donc φ est croissante sur $[0, a]$, et ainsi positive car $\varphi(0) = 0$.

2) Posons $n_0 = \lceil \frac{a}{x} \rceil$. La série tronquée $\sum_{n \geq n_0} (-1)^n \varphi\left(\dfrac{x}{n}\right)$ vérifie le critère spécial des séries alternées :

On a $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{x}{n} \leq \dfrac{x}{n_0} \leq a$. Donc $\left(\varphi\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)_{n \geq n_0}$ décroît. Elle converge vers 0. Donc la série converge.

3) Montrons que la série converge uniformément sur tout segment $[0, x_0]$. Posons $R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^n \varphi\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

Considérons $n_0 = \left\lceil \frac{a}{x_0} \right\rceil$. Alors $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [0, x_0]$, $|R_n(x)| \leq \varphi\left(\dfrac{x}{n}\right) \leq \varphi\left(\dfrac{x_0}{n}\right)$.

Donc $\forall n \geq n_0$, $\sup_{x \in [0, x_0]} |R_n(x)| \leq \varphi\left(\dfrac{x_0}{n}\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$. D'où la cv uniforme, et la continuité de f.

Exercice C

1) Supposons (i). Alors $X \sim Y + Z$, et comme Y et Z indépendantes, donc $G_X(t) = G_Y(t) G_Z(t)$.

Comme Y et Z ne sont pas nulles, G_Y et G_Z ne sont pas constantes.

Réciproquement, supposons (ii).

Alors $G_X(t) = f(t)g(t)$, avec f et g séries entières à coefficients réels positifs. Comme $f(1)g(1) = 1$, alors on se ramène au cas $f(1) = g(1) = 1$ en divisant $f(t)$ et $g(t)$ respectivement par $f(1)$ et $g(1)$. Par les propriétés 1 et 2, il existe Y et Z indépendantes telles que $G_Y(t) = f(t)$ et $G_Z(t) = g(t)$, c'est-à-dire $X \sim (Y + Z)$.

2) On prend $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n - m, p)$, avec $0 < m < n$.

On a bien $G_X(t) = (q + pt)^n = (q + pt)^m(q + pt)^{n-m} = G_Y(t)G_Z(t)$. On conclut avec 1).

3) On prend $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda - \mu)$, où on choisit μ vérifiant $0 < \lambda < \mu$.

4) $G_X(t) = \frac{1}{6}(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5)$ et $(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5) = (1 + t + t^2)(1 + t^3)$.

On a ainsi $G_X(t) = \frac{1}{3}(1 + t + t^2) \times \frac{1}{2}(1 + t^3)$. Donc X est décomposable d'après la question 1).

5) Les racines complexes de $1 + t^4$ sont $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$ et leurs conjugués.

Donc $(1 + t^4) = (1 + 2\cos(\frac{\pi}{4})t + t^2)(1 - 2\cos(\frac{\pi}{4})t + t^2) = (1 + \sqrt{2}t + t^2)(1 - \sqrt{2}t + t^2)$.

Comme les facteurs sont irréductibles, c'est l'*unique* façon (à scalaire près) de décomposer $(1+t^4)$ en produit de deux polynômes non constants. Comme l'un des facteurs n'est pas à coefficients tous positifs, X n'est pas décomposable lorsque $G_X(t) = \frac{1}{2}(1 + t^4)$. *Remarque* : L'existence d'une telle v.a. X résulte de la propriété 2.

Exercice D

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière non constante de rayon $R > 0$ et vérifiant $a_0 = 1$.

1) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence forte : $b_0 = 0$ et $b_n = a_n - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{n} b_k a_{n-k}$.

2) a) On obtient donc $|b_n| \leq |a_n| + \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| \, |a_{n-k}|$ par inégalité triangulaire et $\frac{k}{n} \leq 1$.

b) $S_n(\rho) = \sum_{k=0}^{n} |b_k| \, \rho^k \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, \rho^k + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} \left(|b_j| \, \rho^j\right) \left(|a_{k-j}| \, \rho^{k-j}\right)$.

Or, $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} \left(|b_j| \, \rho^j\right) \left(|a_{k-j}| \, \rho^{k-j}\right) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left(|b_j| \, \rho^j\right) \sum_{i=0}^{n} \left(|a_i| \, \rho^i\right) \leq \Delta(\rho) \sum_{j=0}^{n-1} \left(|b_j| \, \rho^j\right)$.

Donc $S_n(\rho) \leq \Delta(\rho) + \Delta(\rho)S_{n-1}(\rho)$, c'est-à-dire $1 + S_n(\rho) \leq 1 + \Delta(\rho)(1 + S_{n-1}(\rho))$.

b) Il suffit de prouver le résultat par récurrence. On a bien $1 + S_0(\rho) = 1$.

Si la propriété est vraie au rang $n - 1$, on obtient $1 + S_0(\rho) \leq 1 + \Delta(\rho)\dfrac{\Delta(\rho)^n - 1}{\Delta(\rho) - 1} = \dfrac{\Delta(\rho)^{n+1} - 1}{\Delta(\rho) - 1}$.

Remarque culturelle : On peut le trouver en utilisant la méthode de variation de la constante, appliquée à $u_n = 1 + S_n(\rho)$ qui vérifie : $u_{n+1} \leq 1 + \Delta(\rho)u_n$ et on pose $u_n = \Delta(\rho)^n k_n$.

3) On a : $b_n\rho^n \leq S_n(\rho) = O(\Delta(\rho)^n)$, donc $b_n = O\left(\left(\dfrac{\Delta(\rho)}{\rho}\right)^n\right)$

Donc $\sum b_n x^n$ converge absolument pour $|x| < \dfrac{\rho}{\Delta(\rho)}$. Donc $R' \geq \dfrac{\rho}{\Delta(\rho)} > 0$.

4) Pour $|x| < \min(R, R')$, on a $f'(x) = f(x)g'(x)$ par produit de Cauchy et la relation initiale définissant les b_n. On conclut $f(x) = \exp(g(x))$ en notant que $f(0) = 1$.