Interrogation n°20. *Barème sur 23.5 pts*

Exercice A. Nombre d'essais nécessaires pour retrouver une valeur déjà obtenue **[6 pts]**

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ des variables i.i.d qui suivent la loi uniforme sur E.

On note A_k l'événement : " $X_1, X_2, ..., X_k$ sont deux à deux distincts ". On note $\overline{A_k} = \Omega \setminus A_k$.

On a $\Omega = A_0 = A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset A_{n+1} = \emptyset$. On pose $\boxed{T = \min\{k \in \{2, ..., n+1\} \mid \overline{A_k}\}}$.

1) a) [0.5 pt] Justifier que $(T > k)$ est un événement. Ainsi T est une variable aléatoire.

b) [2 pts] Pour $k \in \mathbb{N}$, évaluer $P(T > k)$. En déduire que $\boxed{E(T) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}}$.

2) [1 pt] On pose $I_n = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$. Montrer que $I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\, dx$.

On en déduit (*admis* ici) que $I_n = \sqrt{n} J_n$, où $\boxed{J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t}\, dt}$.

3) [1 pt] On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = n \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}t$.

Montrer que $f_n''(t) \leq f_1''(t)$. En déduire $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t} \leq (1+t)e^{-t}$.

4) [1.5 pt] Montrer que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt}$.

Epilogue culturel : On sait que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On en déduit donc $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$.

Exercice B Etude d'une série de fonctions **[4 pts]**

Soit $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. vérifiant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) > 0$.

1) [0.5 pt] Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que φ est croissante et positive sur $[0, a]$.

2) [1.5 pt] Soit $x \geq 0$. Justifier l'existence de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$.

3) [2 pts] Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice C. Variables aléatoires décomposables **[6.5 pts]**

Rappel : On note $X \sim Y'$ pour signifier que les deux v.a. X et Y ont même loi.

On pourra utiliser les deux propriétés suivantes supposées connues (et au programme officiel) :

Propriété 1 : Etant données N variables aléatoires $Y_1, ..., Y_N$, il existe un espace probabilisé (Ω, T, P) et N variables aléatoires $X_1, ..., X_N$ mutuellement indépendantes telles que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $X_k \sim Y_k$.

Propriété 2 : Etant donnée une suite de réels positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, il existe une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(x = n) = a_n$, c'est-à-dire $\forall t \in [-1, 1]$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Soit X une variable aléatoire entière (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{N}$). On dit que X est décomposable ssi il existe deux variables aléatoires entières indépendantes et non nulles Y et Z telles que $X \sim (Y + Z)$.

1) [2 pts] Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est décomposable

(ii) G_X est le produit sur $[-1, 1]$ de deux séries entières non constantes et à coefficients positifs.

2) [1 pt] Soient $n \geq 2$ et $p \in]0, 1[$. On suppose : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ loi binomiale. Montrer que X est décomposable.

3) [1 pt] Soit $\lambda > 0$. On suppose : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ loi de Poisson. Montrer que X est décomposable.

4) [1 pt] On suppose que X suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Expliciter $G_X(t)$. Montrer que X est décomposable (*ind* : utiliser l'écriture $t^k = t^{3q} t^r$, avec $r \in \{0, 1, 2\}$).

5) [1.5 pt] Donner la factorisation dans $\mathbb{R}[t]$ du polynôme $1 + t^4$ en produit de facteurs irréductibles.

En déduire l'existence d'une v.a. non nulle qui n'est pas décomposable.

Exercice D. Logarithme d'une série entière [7 pts] (extrait Mines PSI)

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière non constante de rayon $R > 0$ et vérifiant $a_0 = 1$.

1) [1 pt] Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_n = \sum_{k=0}^{n} k b_k a_{n-k}$$

2) Soit $0 < \rho < R$. Posons $S_n(\rho) = \sum_{k=0}^{n} |b_k| \rho^k$ et $\Delta(\rho) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \rho^n > 1$.

a) [0.5 pt] Montrer que $|b_n| \leq |a_n| + \sum_{k=0}^{n-1} |b_k a_{n-k}|$.

b) [1.5 pt] Montrer que $S_n(\rho) \leq \Delta(\rho) + \Delta(\rho) S_{n-1}(\rho)$.

c) [1 pt] En déduire que $1 + S_n(\rho) \leq \dfrac{\Delta(\rho)^{n+1} - 1}{\Delta(\rho) - 1}$.

3) [1.5 pt] Montrer que $\sum b_n x^n$ admet un rayon de convergence $R' > 0$. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

4) [1.5 pt] En utilisant une équation différentielle, montrer que $\forall |x| < \min(R, R')$, $f(x) = \exp(g(x))$.