Interrogation n°19 bis. Corrigé

Exercice A. Etude d'une intégrale paramétrée

1) $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1} \sim_0 t^{x-2}$ intégrable sur $]0,1]$ car $x-2>-1$ et $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc $J(x)$ existe pour tout $x>1$.

2) Posons $f(t,x) = \dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}$. On a :

- Pour tout $t>0$, $x \longmapsto f(t,x)$ est de classe C^∞ et $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x) = \dfrac{(\ln t)^n t^{x-1}}{e^t-1}$.

- Pour tout $x>0$, les $t \longmapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x)$ sont continues (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in[a,b]\subset]1,+\infty[$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x) \leq \dfrac{(\ln t)^n(t^{a-1}+t^{b-1})}{e^t-1} = \varphi_n(t)$.

On choisit c de sorte que $-1<c<a-2$.

On a $\varphi_n(t) = O\left(t^c\right)$ en $t=0$ et $\varphi_n(t) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc φ_n est intégrable.

Donc J est de classe C^∞.

3) On a $\forall t>0$, $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1} = e^{-t}\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}$.

On a $\int_0^{+\infty}\left|t^{x-1}e^{-nt}\right|\,dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-nt}\,dt = \dfrac{1}{n^x}\int_0^{+\infty} u^x e^{-u}\,du = \dfrac{\Gamma(x)}{n^x}$.

La série $\sum \dfrac{\Gamma(x)}{n^x}$ converge car $x>1$. Par le th ITT, on a donc $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}} = \Gamma(x)\zeta(x)$.

Exercice B

1) On pose $X^{-1}(A) = \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in A\}$

- μ_X est à valeurs positives et $\mu_X(E) = P(\Omega) = 1$

- σ-additivité : Si $(A_i)_{i\in I}$ famille au plus dénombrable de parties de E disjointes, les $X^{-1}(A_i)$ sont des événements disjoints, donc $\mu_X(\bigcup_{i\in I}A_i) = P(X^{-1}(\bigcup_{i\in I}A_i)) = P(\bigcup_{i\in I}X^{-1}(A_i)) = \sum_{i\in I}P(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i\in I}\mu_X(A_i)$.

Donc μ_X est bien une loi sur $(E,\mathcal{P}(E))$.

2) a) On a $\mu_X(A) = P(X\in A) = E(1_{X\in A})$.

Donc $|\mu_X(A)-\mu_Y(A)| = |E(1_{X\in A}) - E(1_{X\in A})| = |E\left(1_{X\in A}-1_{Y\in A}\right)|$ par linéarité.

Par inégalité triangulaire, $|E\left(1_{X\in A}-1_{Y\in A}\right)| \leq E\left(|1_{X\in A}-1_{Y\in A}|\right)$.

b) Posons $Z = |1_{X\in A}-1_{Y\in A}|$. On a $Z(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } (X(\omega)\in A \text{ et } Y(\omega)\notin A) \text{ ou } (X(\omega)\notin A \text{ et } Y(\omega)\in A) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Lorsque $(X(\omega)\in A$ et $Y(\omega)\notin A)$, alors on a nécessairement $X(\omega)\neq Y(\omega)$.

On en déduit que $Z\leq 1_{X\neq Y}$. Par croissance de l'espérance, on obtient $|\mu_X(A)-\mu_Y(A)| \leq P(X\neq Y)$.

Comme la propriété est vraie pour tout $A\subset E$, on a bien $\|\mu_X-\mu_Y\| \leq P(X\neq Y)$.

3) a) Comme $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, $\{n\in\mathbb{N} \mid X_n(\omega)\neq X(\omega)\}$ est majoré (donc finie)

Donc il est soit vide soit admet un maximum. Donc L est bien définie à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(L=n) = (X_n\neq X)\cap(\cap_{k>n}X_n = X)$ est un événement dans $(\Omega,\mathcal{T})$ comme intersection dénombrable d'événements. Donc L est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{T},P)$.

b) On a $X_n(\omega)\neq X(\omega) \Rightarrow L(\omega)\geq n$, c'est-à-dire $(X_n\neq X)\subset(L\geq n)$.

D'où le résultat par croissance de P.

c) Par 2) b) et par 3) b), $\left\|\mu_{X_n} - \mu_X\right\| \leq P(X_n \neq X) \leq P(L \geq n)$.

On a $\cap_{n\in\mathbb{N}}(L \geq n) = \emptyset$, et la suite $((L \geq n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

Par continuité décroissante, on a donc $\lim_{n\to+\infty} P(L \geq n) = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \left\|\mu_{X_n} - \mu_X\right\| = 0$.

Exercice C

1) $f(t) = \dfrac{1}{(1-t)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_k t^k$, avec $c_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!} = \binom{k+n-1}{n-1}$.

2) a) $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^k t^k = \dfrac{p}{1-qt}$.

$E(X) = \varphi'(1) = \dfrac{pq}{(1-q)^2} = \dfrac{q}{p}$ et $E(X^2) = \varphi'(1) + \varphi''(1) = \dfrac{q}{p} + \dfrac{2pq^2}{p^3} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2q^2}{p^2}$.

Remarque : Sans utiliser φ, on a $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+1}$.

b) On a $\phi_n(t) = \varphi(t)^n$, donc par 1), on obtient $P(S_n = k) = \binom{k+n-1}{n-1} p^n q^k$.

3) a) $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_{k,n}) = n\dfrac{q_n}{p_n} \to \lambda$.

b) $P(S_n = k) = \binom{k+n-1}{n-1}(p_n)^n(1-p_n)^k$.

On a $\lim_{n\to+\infty}(p_n)^n = e^{-\lambda}$ et $(1-p_n)^k \sim \dfrac{\lambda^k}{n^k}$ et $\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. Ainsi la loi de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

4) a) $|1_{X\in A} - 1_{Y\in A}|$ vaut $\begin{cases} 1 \text{ ssi } (X \in A \text{ et } Y \notin A) \text{ ou } (X \notin A \text{ et } Y \in A) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Or, $(X \in A \text{ et } Y \notin A) \cup (X \notin A \text{ et } Y \in A) \subset (X \neq Y)$. D'où le résultat.

Donc $P(X \neq Y) = E(1_{X\neq Y}) \geq E(|1_{X\in A} - 1_{Y\in A}|) \geq |E(1_{X\in A} - 1_{Y\in A})| = |P(X \in A) - P(Y \in A)|$.

Remarque : On utilise ici l'inégalité triangulaire : $|E(Z)| \leq E(|Z|)$.

b) si $X_1 + ... + X_n \neq Y_1 + ... + Y_n$, alors nécessairement, il existe k tel que $(X_k \neq Y_k)$.

Donc $(X_1 + ... + X_n \neq Y_1 + ... + Y_n) \subset \bigcup_{1\leq k\leq n}(X_k \neq Y_k)$. D'où le résultat.

5) Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k,n}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} Z_{k,n}$.

T_n suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(nq_n)$, qui converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, car $nq_n \to \lambda$.

Par 4) b), $P(S_n \neq T_n) \leq \sum_{k=1}^{n} P(X_k \neq Y_k) \leq nq_n^2 = O(\frac{1}{n})$, car $q_n = O(\frac{1}{n})$.

Pär 4)a), en prenant $A = \{k\}$, on obtient :$|P(S_n = k) - P(T_n = k)| \leq P(S_n \neq T_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k) = \lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(nq_n^k)e^{-nq_n}}{k!} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

6) Il s'agit de comparer les lois $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{P}(q)$, c'est-à-dire p, qp, qp^2 , ... et e^{-q}, qe^{-q}, $\frac{1}{2}q^2e^{-q}$.

On a $e^{-q} \geq 1 - q = p$: on peut donc choisir Z de sorte que $(X = 0) \subset (Z = 0)$.

Idem pour $qe^{-q} \geq pq$: on peut donc choisir Y de sorte que $(X = 1) \subset (Z = 1)$.

Autrement dit, on choisit Z de sorte que $Z(\omega) = X(\omega)$ lorsque $X(\omega) \in \{0, 1\}$, et ensuite on définit les autres $Z(\omega)$ de façon indépendante de X mais de sorte que Z suive la loi $\mathcal{P}(q)$.

b) On a alors $(X \neq Z) = (X \geq 2 \text{ et } X \neq Z)$. Donc $P(X \neq Z) \leq P(X \geq 2) = \dfrac{pq^2}{1-q} = q^2$.