Interrogation n°19 bis

$\boxed{\textbf{Exercice A}}$ **[4 pts]**

1) [0.5 pt] Justifier avec soin l'existence de $J(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{e^t - 1}\, dt$ pour tout $x > 1$.

2) [1.5 pt] Montrer que J est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

3) [2 pts] Soit $x > 1$. Montrer que $J(x) = \Gamma(x)\zeta(x)$, où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$ et $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

$\boxed{\textbf{Exercice B}}$ **[10 pts]**

Soit E une partie infinie dénombrable de $\mathbb{R}$. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires apparaissant dans la suite de ce problème. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et à valeurs dans E.

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

On appelle loi de X l'application : $\mu_X : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R} \quad A \longmapsto P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$.

1) [2 pts] Montrer que μ_X est une loi sur $(E, \mathcal{P}(E))$.

2) a) [2 pts] Montrer que pour toutes v.a. X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et à valeurs dans E. on a :

$$\forall A \subset E, \qquad |\mu_X(A) - \mu_Y(A)| \leq E\left(|1_{X\in A} - 1_{Y\in A}|\right)$$

b) [2 pts] On pose $\|\mu_X - \mu_Y\| = \sup_{A\subset E} \; |\mu_X(A) - \mu_Y(A)|$. Montrer que $\|\mu_X - \mu_Y\| \leq P(X \neq Y)$.

3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et à valeurs dans E.

On suppose que $\forall \omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge vers $X(\omega)$.

On définit aussi la fonction :

$$L : \Omega \to \mathbb{N} \quad \omega \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n(\omega) = X(\omega) \\ \max\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \text{ sinon} \end{cases}$$

a) [2 pts] Montrer que L est bien définie et est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

b) [1 pt] Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $P(X_n \neq X) \leq P(L \geq n)$.

c) [1 pt] En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \left\|\mu_{X_n} - \mu_X\right\| = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice C. Loi binomiale négative et théorème des événements rares}}$ **[8 pts]**

1) [0.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le DSE de $\dfrac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$: on exprimera c_k par un coefficient binomial.

2) [2 pts] On considère X une v.a. de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = pq^k}$, où $\boxed{q = 1-p}$.

a) Expliciter $\varphi(t) = E(t^X)$ pour $t \in [0,1]$. Montrer que $E(X) = \dfrac{q}{p}$ et exprimer $E(X^2)$ à l'aide de p et q.

b) On considère une suite $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de v.a. indépendantes de même loi que X.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Expliciter $\phi_n(t) = E(t^{S_n})$ pour $t \in [0,1]$. En déduire la valeur des $P(S_n = k)$.

3) [2 pts] Soit une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant $p_n \in [0,1]$ et $p_n = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, où $\lambda > 0$ est fixé.

On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(X_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ de v.a. indépendantes, avec $\boxed{X_{k,n} \text{ de loi } \mathcal{G}(p_n)}$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_{k,n}$.

a) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} E(S_n)$.

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} P(S_n = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire que la loi de S_n converge vers une loi de Poisson.

4) [1.5 pt] *Lemmes. Les deux questions sont indépendantes*

a) Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $A \subset \mathbb{N}$. Montrer que $|1_{X \in A} - 1_{Y \in A}| \leq 1_{X \neq Y}$. En déduire $|P(X \in A) - P(Y \in A)| \leq P(X \neq Y)$.

b) Soient $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$ des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $P(X_1 + ... + X_n \neq Y_1 + ... + Y_n) \leq \sum_{k=1}^n P(X_k \neq Y_k)$.

5) [1 pt] On *admet* que pour toute v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}$, on peut trouver une v.a. $Z : \Omega \to \mathbb{N}$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(q)$ tel que $P(X \neq Z) \leq q^2$.

On reprend les notations de 3). Il existe des v.a. de Poisson $Z_{k,n}$ indépendantes telles que $P(X_{k,n} \neq Z_{k,n}) \leq q_n^2$.

Retrouver le résultat du 3) b).

6) [1 pt] On souhaite prouver la propriété admise au 5). Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ de loi $\mathcal{G}(p)$.

a) Justifier qu'il existe une v.a. Z de loi de Poisson $\mathcal{P}(q)$ telle que $(X = 0) \subset (Z = 0)$ et $(X = 1) \subset (Z = 1)$.

b) Montrer que la v.a. Z considérée au a) vérifie $P(X \neq Z) \leq q^2$.