Interrogation n°19. Corrigé

Exercice A. Borne de Tchernoff pour les sommes d'indicatrices

1) a) On a $E(\exp(tX_i)) = p_i e^t$. On étudie $f(t) = \exp(p_i(e^t - 1)) - p_i e^t$.

On a $f'(t) = \exp(p_i(e^t - 1)) - 1$, qui est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On a $f(0) = 0$, donc f est positive.

b) On a $\exp(tS) = \exp(tX_1)\exp(tX_2)...\exp(tX_n)$.

Comme les v.a. $\exp(tX_i)$ sont mutuellement indépendantes, on a $E(\exp(tS)) = \prod_{i=1}^n E(\exp(tX_i))$.

Par a), $E(\exp(tX_i)) \leq \exp(p_i(e^t - 1))$, donc $E(\exp(tS)) = \prod_{i=1}^n \exp(p_i(e^t - 1)) = \exp(m(e^t - 1))$.

c) Soit $t > 0$.

On a $P(S \geq (1+\delta)m) = P(\ \exp(tS) \geq \exp(t(1+\delta)m)\ )$.

On a $(\exp(tS) \geq 0$. Par Markov,

$$P(\exp(tS) \geq \exp(t(1+\delta)m)) \leq \frac{E(\exp(tS))}{\exp(t(1+\delta)m)} = \frac{\exp(m(e^t - 1))}{\exp(t(1+\delta)m)}$$

On obtient donc bien $P(S \geq (1+\delta)m) \leq \exp(m(-t(1+\delta) + e^t - 1)$.

2) On a $\varphi'(x) = \ln(1+x) + 1 - 1 = \ln(1+x)$. D'où :

x	-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$		$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) On prend $t = \ln(1+\delta) > 0$ car $\delta > 0$.

On a $-t(1+\delta) + e^t - 1 = -(1+\delta)\ln(1+\delta) + \delta = -\varphi(\delta)$.

Par 1) c), on obtient bien $P(S \geq (1+\delta)m) \leq \exp(-\varphi(\delta)m)$.

b) Comme au 1) c), on a :

$\forall t < 0$, $P(S \leq (1-\delta)m) = P(tS \geq t(1-\delta)m) = P(\exp(tS) \geq \exp(t(1-\delta)m))$.

On obtient donc $P(S \leq (1-\delta)m) \leq \dfrac{E(\exp(tS))}{\exp(t(1-\delta)m)} = \exp(m(-t(1-\delta) + e^t - 1))$.

On prend $t = \ln(1-\delta) < 0$ car $0 < \delta < 1$.

On obtient bien finalement $P(S \leq (1-\delta)m) \leq \exp(-\varphi(-\delta)m)$.

Exercice B. Inégalité de Hoffman-Wieland

1) a) $\operatorname{tr}((PMQ)^T PMQ) = \operatorname{tr}(Q^T M^T P^T PMQ) = \operatorname{tr}(Q^T M^T MQ)$, car $P^T P = I_n$.

On a de plus $\operatorname{tr}(Q^T M^T MQ) = \operatorname{tr}(M^T MQQ^T) = \operatorname{tr}(M^T M)$, ce qui permet de conclure.

b) Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = U^T D_A U$ et il existe $V \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = V^T D_B V$.

Par a), on a $\|A - B\|_F^2 = \left\|U^T D_A U - V^T D_B V\right\|_F^2 = \left\|D_A UV^T - UV^T D_B\right\|$.

Ainsi, la matrice orthogonale $P = UV^T$ convient.

c) On a $D_A P = (p_{ij}\lambda_i(A))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ et $PD_B = (p_{ij}\lambda_j(B))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.

Or, on a $\|M\|_F^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}^2$, donc $\|A - B\|_F^2 = \|D_A P - PD_B\|_F^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} p_{ij}^2(\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$.

2) a) $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car définie par des identités stables par passage à la limite.

$\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est non vide car $I_n \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est bornée, car pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $0 \leq m_{ij} \leq 1$, donc $\|M\|_F^2 \leq n$.

b) L'application f est linéaire.

Donc $f(M + xE_{ii} + xE_{jk} - xE_{ik} - xE_{ji}) - f(M) = x(f(E_{ii}) + f(E_{jk}) - f(E_{ik}) - f(E_{ji}))$.

Or, $f(E_{ii}) + f(E_{jk}) - f(E_{ik}) - f(E_{ji})$

$= (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 + (\lambda_j(A) - \lambda_k(B))^2 - (\lambda_i(A) - \lambda_k(B))^2 - (\lambda_j(A) - \lambda_i(B))^2$

$= -2(\lambda_i(A)\lambda_i(B) + \lambda_j(A)\lambda_k(B) - \lambda_i(A)\lambda_k(B) - \lambda_j(A)\lambda_i(B)) = (\lambda_i(A) - \lambda_j(A))(\lambda_i(B) - \lambda_k(B))$.

Donc on obtient $2x(\lambda_i(A) - \lambda_j(B))(\lambda_k(A) - \lambda_i(B))$, qui est < 0, car $x > 0$, $\lambda_i(A) > \lambda_j(B)$ et $\lambda_k(A) < \lambda_i(B)$.

c) Pour $j < i$, on a $m_{jj} = 1$, donc on a nécessairement $\forall k \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$, $m_{jk} = 0$ et $m_{kj} = 0$.

Autrement dit, M est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_i & O \\ \hline O & N \end{array}\right)$, où $N \in \mathcal{M}_{n-i}(\mathbb{R})$ est une matrice bistochastique.

Comme $m_{ii} < 1$ et que $\sum_{j=1}^n m_{ji} = \sum_{k=1}^n m_{ik} = 1$, il existe $j > i$ et $k > i$ tels que $m_{ji} > 0$ et $m_{ik} > 0$.

On a de plus $m_{jk} < 1$, car sinon, on aurait $m_{ji} = m_{ik} = 0$.

On considère alors $x = \min(1 - m_{ii}, 1 - m_{jk}, m_{ji}, m_{ik}) > 0$.

Remarque : en fait, on a nécessairement $m_{ji} \leq 1 - m_{ii}$ et $m_{ik} \leq 1 - m_{jk}$, donc $x = \min(m_{ji}, m_{ik})$.

Ainsi, la matrice $M' = M + xE_{ii} + xE_{jk} - xE_{ik} - xE_{ji}$ est à coefficients positifs.

De plus, les sommes sur les coefficients des lignes i et j valent bien $1 + x - x = 1$.

Il en est de même des sommes sur les coefficients des colonnes i et k.

Donc M' est bien bistochastique. On obtient dont finalement une matrice M' vérifiant $f(M') < f(M)$.

d) f atteint sur $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ son minimum en une matrice M. Par c), On a nécessairement $M = I_n$.

e) Lorsque $P \in O_n(\mathbb{R})$, on a aussi $P^T \in O_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, les vecteurs lignes et les vecteurs colonnes de P sont de norme 1.

Donc la matrice $M = (p_{ij}^2)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est bistochastique.

Par 2), $f(I_n) \leq f(P)$, et par 1) c), $f(P) = \|A - B\|_F^2$.

Comme $f(I_n) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$, on conclut : $\sum_{i=1}^n (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 \leq \|A - B\|_F^2$.

3) a) On a $A = PD_AP^T$, avec $P \in O_n(\mathbb{R})$.

On note que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1(A) + \dfrac{n-1}{k} > \lambda_2(A) + \dfrac{n-2}{k} > ... > \lambda_n(A) + \dfrac{0}{k}$

On considère $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = PD_{A,k}P^T$, où $D_{A,k} = \mathrm{Diag}(\lambda_i(A_k))_{1 \leq i \leq n}$, où $\lambda_i(A_k) = \lambda_i(A) + \dfrac{n-i}{k}$:

On a bien $\lim_{k \to +\infty} D_{A,k} = D_A$ donc $\lim_{k \to +\infty} A_k = A$ par continuité de $M \longmapsto PMP^T$ (linéaire).

D'autre part, on peut noter que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{k \to +\infty} \lambda_i(A_k) = \lambda_i(A)$.

b) On considère de même une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers B, avec $\forall i$, $\lim_{k \to +\infty} \lambda_i(B_k) = \lambda_i(B)$.

Par 2), on a $\forall k$, $\sum_{i=1}^n (\lambda_i(A_k) - \lambda_j(B_k))^2 \leq \|A_k - B_k\|_F^2$.

Par continuité de $M \longmapsto \|M\|_F^2$ et par passage à la limite, on obtient bien l'inégalité demandée.