**Interrogation n°19**. *Barème sur 23 pts*

$\boxed{\textbf{Exercice A. Borne de Tchernoff pour les sommes d'indicatrices}}$ **[9 pts]**

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\delta \in ]0,1[$.

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètres respectifs $p_1, ..., p_n$. On pose

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad m = E(S)$$

**1)** a) [1.5 pt] Montrer que pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(\exp(tX_i)) \leq \exp(p_i(e^t - 1))$.

b) [1 pt] Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(\exp(tS)) \leq \exp(m(e^t - 1))$.

c) [2 pts] En déduire que

$$\forall t > 0, \quad P(S \geq (1+\delta)m) \leq \exp(m(-t(1+\delta) + e^t - 1))$$

**2)** [1 pt] On considère la fonction $\varphi$ définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$\varphi(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$

Montrer que $\forall x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$, $\varphi(x) > 0$.

**3)** a) [1.5 pt] Démontrer que

$$P(S \geq (1+\delta)m) \leq \exp(-\varphi(\delta)m)$$

b) [2 pts] En s'inspirant de 1) c), montrer également que

$$P(S \leq (1-\delta)m) \leq \exp(-\varphi(-\delta)m)$$

$\boxed{\textbf{Exercice B. Inégalité de Hoffman-Wieland}}$ **(Centrale MP 2021) [14 pts]**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme de Frobenius (norme euclidienne canonique) : $\|M\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(M^T M)}$.

Pour toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(A) \geq ... \geq \lambda_n(A)$ les valeurs propres de $A$ (répétées avec multiplicité) classées par ordre décroissant. On pose $D_A = \operatorname{Diag}(\lambda_1(A), ..., \lambda_n(A))$.

On note $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\lambda_1(A) > ... > \lambda_n(A)$.

Soient $A$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

**1)** a) [1 pt] Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et deux matrices orthogonales $P$ et $Q \in O_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\|PMQ\|_F = \|M\|_F$.

b) [2 pts] Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\|A - B\|_F^2 = \|D_A P - P D_B\|_F^2$$

c) [1.5 pt] Montrer que

$$\|A - B\|_F^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} p_{ij}^2 (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$$

**2)** On suppose dans cette question $A$ et $B \in \mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\lambda_1(A) > ... > \lambda_n(A) \quad \text{et} \quad \lambda_1(B) > ... > \lambda_n(B).$$

On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ dont les coefficients sont tous positifs et tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} m_{ji} = 1 \qquad \text{(sommes par lignes et par colonnes)}$$

On considère $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}(\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$.

a) [2 pts] Montrer que $f$ atteint sa valeur minimale sur l'ensemble $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ des matrices bistochastiques.

On se propose de prouver dans la suite que ce minimum est atteint en la matrice identité.

b) [1 pt] Soient $i, j, k \in [\![1, n]\!]^3$ tels que $i < j$ et $i < k$.

Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(M + xE_{ii} + xE_{jk} - xE_{ik} - xE_{ji}) - f(M) = 2x(\lambda_i(A) - \lambda_j(A))(\lambda_k(B) - \lambda_i(B)) < 0$$

c) [3 pts] Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique différente de l'identité.

On considère $i$ le plus petit entier tel que $m_{ii} \neq 1$.

Montrer qu'il existe $M' \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M') < f(M)$.

d) [1 pt] En déduire que $\min\{f(M) \mid M \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})\} = f(I_n)$.

e) [1 pt] Montrer que $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \leq \|A - B\|_F^2$.

**3)** a) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

Construire une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices appartenant à $\mathcal{S}_n^*(\mathbb{R})$ et convergeant vers $A$.

b) [0.5 pt] Montrer que pour tous $A$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \leq \|A - B\|_F^2$.