Interrogation n°18 bis. Compléments sur les formes quadratiques

Exercice A. Formes quadratiques

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

1) Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

On définit la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ par $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Soient x et $y \in E$. On pose $X = (x_1, ..., x_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x$ et de même $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, y$.

a) Montrer que $\varphi(x, y) = X^T AY$.

b) Donner sans justification une CNS sur A pour que φ soit un produit scalaire sur E.

c) On considère $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une autre base de E.

Exprimer $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, \varphi$ en fonction de A et de $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

2) Soit u un endomorphisme de E euclidien muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

On considère $\forall (x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \varphi = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.

3) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in S_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$.

On considère $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\varphi(X, Y) = X^T AY$ et $u(X) = AX$.

a) Montrer que $\det A \geq 0$.

b) Montrer que $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $a_{ii} \geq 0$: autrement dit, les coefficients diagonaux de A sont positifs.

c) On considère la sous-matrice $B = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1}$ obtenue en supprimant dans A la dernière ligne et la dernière colonne. Montrer que $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Indication : On pourra considérer la restriction ψ de φ à $F \times F$, où F est un sev de $E = \mathbb{R}^n$.

Exercice B

1) On considère $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

a) Soit $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que $X^T AX = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(x_j + \dfrac{\alpha_j}{\lambda_j} x_n \right)^2 + \mu x_n^2$, où $\mu = \beta - \sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{\alpha_j^2}{\lambda_j}$.

b) On suppose $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $\lambda_j > 0$ et $\det A > 0$. Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On considère la sous-matrice $B = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1}$.

Exercice C. Co-orthogonalisation de formes quadratiques

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. *Les questions 1), 2) et 3) sont indépendantes*

1) On considère les formes bilinéaires symétriques associées à A et B définies par

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(X) = X^T A X \quad \text{et} \quad \psi(X) = X^T B X.$$

La forme bilinéaire symétrique φ est un produit scalaire, qu'on notera $\varphi(X,Y) = \langle X, Y \rangle_A$.

a) Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^T A Q = I_n$.

b) Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telle que $\begin{cases} P^T A P = I_n \\ P^T B P = D \end{cases}$

Indication : Chercher P sous la forme $P = QU$, avec U matrice orthogonale.

Remarque culturelle : On obtient une base à la fois φ-orthonormée et ψ-orthogonale.

c) En déduire que la matrice $M = A^{-1}B$ est diagonalisable.

2) Montrer que $M = A^{-1}B$ est symétrique pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_A$. Retrouver 1) d).

3) a) Montrer qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.

b) En utilisant SBS, montrer que AB est diagonalisable.

c) On admet que la matrice S du a) est unique. Montrer que S est un polynôme en A.

d) *Question supplémentaire.* Démontrer l'unicité de $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant $A = S^2$.

Exercice D. Laplacien invariant par changement de base orthonormée

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ \ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2.

On note $\mathcal{B} = (e_1, .e_2)$ la base canonique, orthonormée pour le produit scalaire canonique.

On considère une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_1', .e_2')$. On pose $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On note $X' = (x', y')$ les coordonnées de X dans $\mathcal{B}'$.

On considère $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g(x', y')$.

1) a) Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ en fonction des dérivées partielles de g en (x', y').

b) En déduire que $\Delta f(x,y) = \Delta g(x', y')$, où $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

2) On note Z le gradient de f en $\overrightarrow{0} = (0,0)$ et H la matrice Hessienne de f en $\overrightarrow{0}$.

a) Exprimer sans justification le DL_2 de $f(X)$ en $X = 0$.

b) En déduire (en fonction de H et P) le DL_2 de $g(X')$ en $X' = 0$.

Par unicité du DL, on peut ainsi exprimer la matrice Hessienne H' de g en $(0,0)$ en fonction de H et P.

Interrogation n°18 ter

Exercice A. Rang d'une somme de matrices

1) Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$.

2) Soit $n \geq 2$. On considère la matrice $A = (i+j-1)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Montrer que $\operatorname{rg} A = 2$.

3) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle et un entier r vérifiant $0 \leq r \leq n$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ symétrique positive et $\operatorname{rg} M = r$

(ii) il existe une famille orthogonale libre $(Z_1, ..., Z_r)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $M = \sum_{j=1}^r Z_j Z_j^T$.

Indication : Se ramener au cas où M est diagonale.

4) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ de rang $r = \operatorname{rg} M$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{rg} M = r$

(ii) il existe des familles libres $(X_1, ..., X_r)$ de $\mathbb{R}^n$ et $(Y_1, ..., Y_r)$ de $\mathbb{R}^p$ telles que $M = \sum_{j=1}^r X_j Y_j^T$.

Indication : Se ramener au cas où $M = J_r$.

Exercice B. Matrices nilpotentes

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A nilpotente (c'est-à-dire A admet un polynôme annulateur de la forme X^p)

(ii) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

(iii) $A^n = O_n$

(iv) 0 est la seule valeur propre de A.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\operatorname{tr}(A^k) = 0$.

On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les racines de χ_A (répétées selon l'ordre de multiplicité).

a) Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\operatorname{tr}(P(A)) = nP(0)$.

b) En déduire avec les polynômes de Lagrange que A est nilpotente.

c) Réciproquement, montrer que si A est nilpotente, alors $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\operatorname{tr}(A^k) = 0$.