Interrogation n°18. Corrigé

Exercice A

1) On a $\dim E_\mu = 1$ car μ est racine simple du polynôme caractéristique.

On a $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \mu-\lambda \end{pmatrix} = 1$ si $\alpha = 0$, et vaut 2 si $\alpha \neq 0$.

A est diagonalisable ssi $\dim E_\lambda = 2$ (ordre de λ comme racine de χ_A), donc ssi $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = 1$, donc ssi $\alpha = 0$.

2) On suppose $\boxed{\alpha = 0}$. Une base de E_λ est (e_1, e_2). On résout $AX = \mu X$, qui s'écrit $\begin{cases} \lambda x + \beta z = \mu x \\ \lambda y + \gamma z = \mu y \end{cases}$

On en déduit que $E_\mu = \mathrm{Vect}(e_3')$, où $e_3' = \left(\dfrac{\beta}{\mu-\lambda}, \dfrac{\gamma}{\mu-\lambda}, 1\right)$.

On peut donc prendre $P = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1, e_2, e_3') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta/(\mu-\lambda) \\ 0 & 1 & \gamma/(\mu-\lambda) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda, \lambda, \mu)$: les colonnes de P forment une base adaptée à $E_\lambda \oplus E_\mu$.

Exercice B

1) a) Le polynôme $P(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_n)$ annule u.

On a ainsi $P(u) = 0$, et donc a fortiori $P(u_{|F}) = 0$.

Comme $P(X)$ est scindé à racines simples, alors $u_{|F}$ est diagonalisable, et $\mathrm{Sp}(u_{|F}) \subset \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.

Donc $F = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$, où $F_j = \mathrm{Ker}(u_{|F} - \lambda_j \,\mathrm{Id}) = E_{\lambda_j} \cap F$.

b) Tout sev d'un espace propre est stable par u, et une somme de sev stables est stable.

On en déduit de a) que les sev propres de E sont les $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$, où $\forall j \in [\![1, p]\!]$, F_j sev de E_{λ_j}.

c) Si v commute avec u, les sev propres E_{λ_j} de u sont stables par v.

Réciproquement, supposons que tous les sev propres E_{λ_j} de u sont stables par v.

Alors sur chaque sev E_{λ_j}, v commute avec l'homothétie $\lambda_j \,\mathrm{Id}$, la restriction de u à E_{λ_j}.

Donc v commute avec u sur E.

d) $C(u)$ est donc isomorphe à $\mathcal{L}(E_{\lambda_1}) \times ... \times \mathcal{L}(E_{\lambda_p})$ par $v \longmapsto (v_1, ..., v_p)$, où $v_j = v_{|E_{\lambda_j}}$.

Donc $\dim C(u) = m_1^2 + ... + m_p^2$.

Remarque : Dans une base adaptée à $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$, $v \in C(u)$ ssi sa matrice dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, où les blocs correspondent aux E_{λ_j}.

2) a) On a $v(u^j(x)) = u^j(v(x)) = u^j\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{j+k}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(u^j(x))$.

Donc v et $w = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ sont égaux en tous les $u^j(x)$, donc par linéarité sur E.

b) La réciproque étant immédiate, les endomorphismes commutant avec u sont les polynômes en u.

On a donc $C(u) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, u^2, ..., u^{n-1})$.

Comme $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est libre, alors a fortiori $(\mathrm{Id}, u, u^2, ..., u^{n-1})$ est libre.

Donc $\dim C(u) = n$.

3) a) On a $u(F_p) = \text{Vect}(u^{p+1}(x), u^{p+2}(x), ..., u^{n-1}(x), \overrightarrow{0}) = F_{p+1}$, donc F_p est stable.

Donc $G \subset F_p$. On considère $\mathcal{B}_p = (u^p(x), u^{p+1}(x), ..., u^{n-1}(x))$ base de F_p.

Dans la base $\mathcal{B}_p$, on a $y = \alpha u^p(x) + \beta u^{p+1}(x) + ...$, avec $\alpha \neq 0$ puisque $y \notin F_{p+1}$.

On considère la matrice de $(y, u(y), ..., u^{n-1-p}(y))$ dans la base $\mathcal{B}_p$.

La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \beta & \alpha \end{pmatrix}$, triangulaire supérieure inversible, car $\alpha \neq 0$.

On en déduit que $(y, u(y), ..., u^{n-1-p}(y))$ est une base de F_p, et ainsi $G = F_p$.

b) On a $E = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n = \{\overrightarrow{0}\}$.

On considère le plus grand entier p tel que $F \subset F_p$.

Comme F est non nul, on a $p \leq n-1$. Il existe donc un vecteur y tel que $y \in F_p \setminus F_{p+1}$.

Par a), $F_p = (y, u(y), ..., u^{n-1-p}(y))$. Comme F est stable par u, alors $F_p \subset F$. Donc $F = F_p$.

c) Ainsi, les sev stables par u sont les F_p, avec $0 \leq p \leq n$.

Exercice C. Adjoint et matrice antisymétrique

1) Il existe x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. Alors $\langle u(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2$, donc $\lambda = 0$.

2) a) On a : $X \in (\text{Im}\, A)^\perp$ ssi $\forall Y,\ (X \mid AY) = 0$ ssi $\forall Y,\ (A^T X \mid Y) = 0$ ssi $A^T X = 0$ ssi $X \in \text{Ker}(A^T)$.

Donc $\text{Ker}(A^T) = (\text{Im}\, A)^\perp$. Comme $(A^T)^T = A$, on a donc aussi $\text{Ker}(A) = (\text{Im}(A^T))^\perp$.

En passant à l'orthogonal, on obtient $\text{Ker}(A)^\perp = \text{Im}(A^T)$.

3) a) Considérons $A' = U^{-1}AU$. On a $(A')^T = U^T A^T U = -U^T AU$, donc A' est antisymétrique.

Autre preuve : On a $a'_{ij} = \langle e_i \mid u(e_j)\rangle = -\langle e_j \mid u(e_i)\rangle = -a'_{ji}$, donc A' est antisymétrique.

b) Par 1), on a $(\text{Ker}\, A)^\perp = \text{Im}(A^T) = \text{Im}(-A) = \text{Im}\, A$.

Dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ associée à $\text{Im}\, A \oplus \text{Ker}\, A = E$, on a donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Par a), $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est antisymétrique, donc B est antisymétrique.

D'autre part, $\text{rg}\, B = r = \text{rg}\, A$, donc B est une matrice d'ordre r et de rang r, donc inversible.

Variante : B est la matrice de la restriction de u à $\text{Im}\, A = \text{Im}\, u$, donc est antisymétrique et inversible.

c) On a $\det(-B) = \det(B)$, donc $(-1)^r \det B = \det B$, et comme $\det B \neq 0$, alors r est pair.

4) $(A - I_n)$ est inversible car 1 n'est pas valeur propre de A. En effet, 0 est la seule valeur propre réelle possible.

Posons $U = (A + I_n)(A - I_n)^{-1}$.

On a $U^T U = \left((A - I_n)^{-1}\right)^T (A + I_n)^T (A + I_n)(A - I_n)^{-1}$. Comme l'inverse de la transposée est aussi la transposée de l'inverse et que $A^T = -A$, on en déduit $U^T U = (A + I_n)^{-1}(A - I_n)(A + I_n)(A - I_n)^{-1}$.

Pour conclure que $U^T U = I_n$, il suffit de prouver que $(A + I_n)^{-1}$ et $(A - I_n)$ commutent.

Or, $(A + I_n)$ et $(A - I_n)$ commutent. Et si $MN = NM$, alors on a aussi $N^{-1}M = MN^{-1}$ (pour N inversible).

Exercice D

1) Comme det est continue, $U = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0\}$ est ouvert. En effet, son complémentaire $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 0\}$ est fermé : si $\lim_{k\to+\infty} M_k = M$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\det M_k = 0$, alors $\det M = 0$.

2) On a $(M+H) = M(I_n + M^{-1}H)$. Or, pour A vérifiant $\|A\| < 1$, on a $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

On a en effet : $(I_n - A)\sum_{k=0}^{N} A^k = (I_n - A^{N+1}) \to I_n$ lorsque $N \to +\infty$, car $\left\|A^{N+1}\right\| \leq \|A\|^{N+1} \to 0$.

On en déduit le résultat, car $(M+H)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1}$.

3) Par 2), $(M+H)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + \mathfrak{o}(\|H\|)$, car $\left\|\sum_{k=2}^{N}(M^{-1}H)^k\right\| \leq \sum_{k=2}^{N}\left\|M^{-1}H\right\|^k = \dfrac{\left\|M^{-1}H\right\|^2}{1 - \|M^{-1}H\|} = O(\|H\|^2)$.

Donc $df(M)\cdot H = -M^{-1}HM^{-1}$.

Exercice F

1) - Supposons (i). Posons $Y = AX$, o ù$X \geq 0$. alors $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0$.

- Supposons (ii). Alors $A_j = AE_j \geq 0$ car $E_j \geq 0$. Donc $A \geq 0$.

2) - Supposons (i). Par 1), si $AX \geq 0$, alors $A^{-1}(AX) \geq 0$, c'est-à-dire $X \geq 0$.

- Supposons (ii). Soit X tel que $AX = 0$. On a donc $AX = 0$ et $A(-X) = 0$, donc $X \geq 0$ et $-X \geq 0$.

On en déduit $X = 0$, et donc A est injective, et donc inversible.

Donc $Y = AX$ décrit toutes les valeurs de $\mathbb{R}^n$, et on a ainsi, $\forall Y \in \mathbb{R}^n$, $Y \geq 0 \Rightarrow A^{-1}Y \geq 0$.

Par 1), on en déduit $A^{-1} \geq 0$.

3) Il suffit de prouver que la propriété (ii) de 2) est vérifiée.

Soit $A \in \mathbb{R}^n$ telle que $AX \geq 0$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii}x_i \geq -\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j = \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\,x_j$.

Supposons par l'absurde que X n'est pas positif : il existe p tel que $x_p = \min_{1\leq i\leq n} x_i < 0$.

Alors $a_{pp}x_p < \left(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)x_p \leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\,x_j$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $X \geq 0$. D'où le résultat.