Interrogation n°18. *Barème sur 23 pts*

Exercice A. [3 pts]

On considère $A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \lambda & \gamma \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, avec $\lambda \neq \mu$.

1) [1.5 pt] Donner une CNS pour que A soit diagonalisable. Justifier votre réponse.

2) [1.5 pt] Dans le cas où A est diagonalisable, expliciter $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice B. Sous-espaces stables et de commutant d'un endomorphisme [9 pts]

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable d'un K-espace vectoriel de dimension finie.

On pose $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ et $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p} = E$. On pose $m_j = \dim E_{\lambda_j}$.

a) [1.5 pt] Soit F un sev de E stable par u. Montrer que la restriction $u_{|F}$ est diagonalisable.

b) [1 pt] Expliciter *tous* les sev de E stables par u.

c) [1 pt] Caractériser tous les endomorphismes v qui commutent avec u.

d) [1 pt] Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

On suppose u cyclique : il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.

a) [1 pt] Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $(a_0, ..., a_{n-1}) \in K^n$ tel que $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x)$.

Montrer que si v commute avec u, alors $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$.

b) [1 pt] Caractériser tous les endomorphismes v qui commutent avec u.

En déduire la dimension de $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre n, c'est-à-dire $u^{n-1} \neq 0$ et $u_n = 0$.

On considère $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On admet que $\mathcal{B} = (x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.

Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $F_p = \mathrm{Vect}(u^p(x), u^{p+1}(x), ..., u^{n-1}(x))$. On pose $F_n = \{0\}$.

a) [1 pt] Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$ et $y \in F_p \setminus F_{p+1}$. Déterminer $G = \mathrm{Vect}(u^k(y))_{k \leq n}$.

b) [1.5 pt] Soit F un sev non nul de E stable par u. Montrer qu'il existe $p \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $F = F_p$.

Exercice C. Adjoint et matrice antisymétrique [7 pts]

On considère $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ le produit scalaire canonique dans $E = \mathbb{R}^n$.

Soit u un endomorphisme de E.

On dit que u est antisymétrique ssi $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$.

1) [0.5 pt] Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique et λ une valeur propre (réelle) de u. Montrer que $\lambda = 0$.

2) [2 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^T) = (\mathrm{Im}\, A)^\perp$ et que $\mathrm{Im}(A^T) = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On note $u : X \longmapsto AX$ l'endomorphisme associé.

a) [0.5 pt] Montrer que pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est une matrice antisymétrique.

b) [2 pts] Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, où B est une matrice antisymétrique inversible (dont on pourra noter r l'ordre, c'est-à-dire $B \in GL_r(\mathbb{R})$).

c) [0.5 pt] En considérant $\det B$, en déduire que $\mathrm{rg}\, A$ est pair.

4) [1.5 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

Montrer que $(A - I_n)$ est inversible et que la matrice $(A + I_n)(A - I_n)^{-1}$ est orthogonale (c'est-à-dire $\in O_n(\mathbb{R})$).

Exercice D. Différentielle de l'application matricielle d'inversion [2 pts]

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\| \ \|$, c'est-à-dire vérifiant $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

1) [0.5 pt] Montrer que $U = GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) [0.5 pt] Soit $M \in U$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour $\left\|M^{-1}H\right\| < 1$, $(M + H)$ est inversible et

$$(M + H)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-M^{-1}H)^k \right) M^{-1}$$

3) [1 pt] On considère $f : U \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^{-1}$.

En utilisant un DL à l'ordre 1, donner sans justification la différentielle de f en M.

Exercice E. Matrices positives [2 pts]

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) [0.5 pt] Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est à coefficients positifs (on note $A \geq 0$)

(ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $X \geq 0 \Rightarrow AX \geq 0$.

2) [1.5 pt] Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible et $A^{-1} \geq 0$

(ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.

3) *Question supplémentaire.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

(i) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} \geq 0$ et $\forall i \neq j$, $a_{ij} \leq 0$

(ii) A est à diagonale dominante : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Montrer que A est inversible et $A^{-1} \geq 0$.

Indication : Pour $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX \geq 0$, on pourra considérer p tel que $x_p = \min_{1 \leq i \leq n}(x_i)$.