Interrogation n°17. Corrigé.

1) a) Si $k > 0$, les solutions paires sont les $\alpha\cos(\omega t)$, où $\omega = \sqrt{k}$.

Si $k = 0$, les solutions paires sont les solutions constantes.

Si $k < 0$, les solutions paires sont les $\alpha\,\mathrm{ch}(\omega t)$, où $\omega = \sqrt{-k}$, avec $\mathrm{ch}(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$.

b) Si $k > 0$, $y(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$, où $\omega = \sqrt{k}$. Si $k = 0$, $y(t) = t$. Si $k < 0, y(t) = \dfrac{\mathrm{sh}(\omega t)}{\omega}$, où $\omega = \sqrt{-k}$.

2) On considère un changement de variable $F(u, v) = f(x, y)$ de sorte que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$ apparaisse dans $\dfrac{\partial F}{\partial u}$.

On choisit par exemple $x = u$ et $y = u + v$, d'où $F(u, v) = f(u, u + v)$. Ainsi $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(u, u + v)$.

Donc f vérifie (E) ssi $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \lambda F$, c'est-à-dire ssi $F(u, v) = k(v)\ e^{\lambda u}$, où $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

On en conclut que les solutions de (E) sont les $f(x, y) = k(y - x)\ e^{\lambda x}$, où $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

3) a) Avec $f(x) = z(x)e^{-ax}$, on obtient $f(x) = f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x g(t)e^t\ dt$.

Posons $M = \sup_{[0,+\infty[} |g|$. On a $\forall x \geq 0$, $\left|\int_0^x g(t)e^t\ dt\right| \leq \int_0^x \left|g(t)e^t\right|\ dt \leq Me^x$.

Donc $|f(x)| \leq |f(0)| + M = |f(0)| + M$.

b) On utilise la factorisation du polynôme d'endomorphisme :

En notant $D : y \longmapsto y'$, on a $D^2 + 2D + \mathrm{Id} = (D + \mathrm{Id}) \circ (D + \mathrm{Id})$.

Ainsi, en posant $g = f' + f$ et $h = g' + g$, on a $f'' + 2f' + f = h$.

Par hypothèse h boirnée, donc par a), g est bornée„ puis à nouveau par a), f est bornée.

4) a) On pose $x_n = \dfrac{y_n}{2^n}$. On a $y_n - y_{n-1} = 2^n a_n$, donc $y_n - y_0 = \sum_{k=1}^n 2^k a_k$.

Donc $x_n = \dfrac{x_0}{2^n} + \sum_{k=1}^n \dfrac{a_k}{2^{n-k}}$.

b) On a donc $|x_n| \leq \dfrac{|x_0|}{2^n} + M\sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{1}{2^j} \leq |x_0| + 2M$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

c) Par linéarité de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut par linéarité se ramener aux deux cas :

- Cas où $a_n = L$ constante. Alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = L\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 2L$.

- Cas où $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $n \geq p$ assez grand, $|a_n| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall n \geq p$, $|x_n| \leq \dfrac{|x_0|}{2^n} + \sum_{j=0}^{p-1} \dfrac{|a_j|}{2^{n-j}} + \varepsilon\sum_{j=p}^{n-1} \dfrac{1}{2^j} \leq \dfrac{|x_0|}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n-p}}\sum_{j=0}^{p-1} |a_j| + 2\varepsilon$.

Donc pour n assez grand, $|x_n| \leq 3\varepsilon$, car $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|x_0|}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n-p}}\sum_{j=0}^{p-1} |a_j| = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

5) a) A est symétrique réelle donc est diagonalisable. Notons λ et μ les racines de χ_A.

On a $\lambda\mu = \det A = -a^2 - b^2 < 0$ car $\det A \neq 0$. Donc λ et μ sont non nuls et de signes opposés.

b) Soit Z un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Avec $\gamma(t) = tZ$, on a $g(\gamma(t)) = t^2\ Z^T AZ = t^2\ (Z \mid AZ) = \lambda t^2 \|Z\|^2$.

Donc $g(\gamma(t)) = \lambda t^2 \|Z\|^2 + \mathfrak{o}(t^2)$.

Comme $\lambda \|Z\|^2 < 0$, alors $g(\gamma(t))$ admet un maximum local strict en $t = 0$.

c) Il résulte de b) que g n'admet pas de minimum local en $\overrightarrow{0}$. De même, en considérant un vecteur propre associé à μ, on obtient un chemin prouvant que g n'admet pas de maximum local en $\overrightarrow{0}$.

d) Supposons que f admette en X_0 un extremum local.

Alors $\operatorname{grad} f(X_0) = \overrightarrow{0}$. On considère $g(X) = f(X_0 + X) - f(X_0)$.

Par le DL$_2$, on sait que $g(X) = X^T AX + \mathfrak{o}\left(\|X\|^2\right)$, où $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

La matrice A vérifie les hypothèses du a), car $\operatorname{tr} A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$ et $\det A < 0$.

On en déduit par c) que g n'admet pas d'extremum local en $\overrightarrow{0}$.

D'où une contradiction.

6) a) On sait que $f(X_0 + X) = f(X_0) + \langle \operatorname{grad} f(X_0), X\rangle + \dfrac{1}{2} X^T AX + \mathfrak{o}\left(\|X\|^2\right)$ lorsque X tend vers $\overrightarrow{0}$.

On a $\lim_{t\to 0} tZ = 0$, donc $\varphi(t) = f(X_0 + tZ) = f(X_0) + t\,\langle \operatorname{grad} f(X_0), Z\rangle + \dfrac{1}{2} t^2 Z^T AZ + \mathfrak{o}\left(t^2\right)$.

Or, par Taylor-Young, on a $\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \dfrac{1}{2} t^2 \varphi''(0) + +\mathfrak{o}\left(t^2\right)$.

Par unicité du DL, on obtient $\varphi''(0) = Z^T AZ$.

b) On a $\varphi''(t) = \langle Z, AZ\rangle \geq 0$, car $A = H(X_0 + tZ)$ est symétrique positive, donc φ est convexe.

c) On prend $X_0 = X$ et $Z = Y - X$. On a donc $\varphi(t) = f(X + tZ) = f((1-\lambda)X + \lambda Y)$.

Par b), φ est convexe, donc $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\varphi(\lambda) = \varphi((1-\lambda).0 + \lambda.1) = (1-\lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1)$.

Ainsi, on obtient bien $f((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda)f(X) + \lambda f(Y)$.

d) La fonction φ est convexe, donc est au-dessus de sa tangente en $t = 0$.

On a donc $\varphi(t) \geq \varphi(0) + t\varphi'(0)$. Or, $\varphi'(0) = \langle \operatorname{grad} f(X_0), Z\rangle$

Donc $\varphi(1) = f(X_0 + Z) \geq f(X_0) + \langle \operatorname{grad} f(X_0), Z\rangle$, d'où le résultat en prenant $Z = X - X_0$.

Lorsque $n = 2$, on en déduit que le graphe de la surface $z = f(x, y)$ est au-dessus de son plan tangent en (x_0, y_0), c'est-à-dire $f(x, y) \geq f(x_0, y_0) + (x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

7) a) On a $\|x - a\| \geq \|x\| - \|a\|$, donc $\|x - a\| \geq \|x\| - \beta$ où $\beta = \max(\|a\|, \|b\|, \|c\|)$ constante

De même pour $\|x - a\|$ et $\|x - a\|$. Donc $f(x) \geq 3(\|x\| - \beta)^p$ pour tout x tel que $\|x\| \geq \beta$.

Remarque : Par pincement, $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

b) On pose $K = \{x \in E \mid f(x) \leq s\}$.

K est un fermé car f est continue. K est non vide car il contient $\overrightarrow{0}$.

K est borné : par a), pour $\|x\| \geq r$ assez grand, on a $f(x) > s$, donc $K \subset B(\overrightarrow{0}, r)$.

On en déduit que K est un compact non vide, donc f atteint sur K sa borne inférieure m.

Pour $x \notin K$, on a $f(x) > s \geq m$, donc m minore f sur E, d'où on conclut $m = \min f$.

c) Considérons $g(x) = \|x - a\|^p = \left((x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2\right)^{p/2}$.

Pour $p \geq 2$, l'application $t \longmapsto t^{p/2}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Donc $\operatorname{grad} g(x) = p\left((x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2\right)^{p/2-1} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} = p\,\|x - a\|^{p-2}\,(x - a)$.

On en déduit $\operatorname{grad} f(x) = p\,\|x - a\|^{p-2}\,(x - a) + p\,\|x - b\|^{p-2}\,(x - b) + p\,\|x - c\|^{p-2}\,(x - c)$.

Par b), f atteint son minimum en un point x. Donc $\operatorname{grad} f(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui permet de conclure.

d) Supposons par l'absurde qu'il existe deux vecteurs distincts x et y vérifiant $f(x) = f(y) = \inf f$.

Posons $z = \frac{1}{2}(x + y)$. Pour conclure à une contradiction, il suffit de prouver que $f(z) < f(x) = f(y)$.

Or, $\|z - a\| = \frac{1}{2}\,\|(x - a) + (y - a)\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x - a\| + \|y - a\|\right)$.

L'application $t \longmapsto t^p$ est convexe (dérivée seconde strictement positive).

Donc $(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)^p) \leq \frac{1}{2}\alpha^p + \frac{1}{2}\beta^p$, avec égalité ssi $\alpha = \beta$.

En prenant $\alpha = \|x - a\|$ et $\beta = \|y - a\|$, on obtient donc $\|z - a\|^p \leq \frac{1}{2}\left(\|x - a\|^p + \|y - a\|^p\right)$.

En sommant les inégalités obtenues avec b et c, on obtient donc $f(z) \leq f(x) + f(y)$.

Et il y a égalité ssi $\|x - a\| = \|y - a\|$, $\|x - b\| = \|y - b\|$ et $\|x - c\| = \|y - c\|$.

Donc x et y appartiennent à l'intersection de trois cercles de centres a, b, c.

Si on avait $x \neq y$, alors $y - x$ serait orthogonal à $c - a$ et $b - a$, ce qui est exclu.