Interrogation n°17. *Barème sur 23 pts*

1) [2 pts] Pour k réel, on considère l'équation différentielle $\boxed{(E) : y'' + ky = 0}$.

a) Expliciter *sans justification* et selon les valeurs de k, LES solutions **paires** de (E).

b) Expliciter *sans justification* et selon les valeurs de k, LA solution y de (E) vérifiant $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

2) [2.5 pts] Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \to f(x, y)$ de classe C^1 vérifiant

$$(E) : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda f$$

Indication : Considérer $F(u, v) = f(u, u + v)$.

3) a) [2 pts] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ de classe C^1. On pose $g = f + f'$.

On suppose que g est **bornée** sur $[0, +\infty[$.

Exprimer f en fonction de g. En déduire que f est bornée.

b) [1.5 pt] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $h = (f'' + 2f' + f)$ est bornée.

En utilisant a), montrer que f est bornée.

4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - \dfrac{1}{2}x_{n-1} = a_n$.

a) [1.5 pt] Soient n et $N \in \mathbb{N}$. Exprimer x_n en fonction de x_0 et des a_k.

b) [1 pt] On suppose $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bornée**. On pose $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

c) *Question supplémentaire* : Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) a) [0.5 pt] Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible telle que $\operatorname{tr} A = 0$.

Montrer que A admet deux valeurs propres λ et μ vérifiant $\lambda < 0$ et $\mu > 0$.

b) [1.5 pt] On considère une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad g(X) = X^T AX + \mathfrak{o}\left(\|X\|^2\right) \text{ lorsque } X \text{ tend vers } \overrightarrow{0}$$

Montrer qu'il existe un chemin continu $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma(0) = \overrightarrow{0}$ et $g(\gamma(t)) < 0$ pour t sur un voisinage de 0 privé de 0, c'est-à-dire que $t \longmapsto g(\gamma(t))$ admet un maximum local strict en $t = 0$.

Indication : Considérer $\gamma(t) = tZ$, où Z est un vecteur bien choisi.

c) [1 pt] Déduire des questions précédentes que g n'admet pas d'extremum local en $\overrightarrow{0}$

d) [1 pt] Soit $f : U \to \mathbb{R}$ $(x, y) \longmapsto f(x, y)$ de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \neq 0$$

Montrer que f n'admet aucun extremum local sur U.

6) *Remarque* : On peut utiliser sans justification les propriétés du cours sur les fonctions convexes réelles.

On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad X = (x_1, ..., x_n) \longmapsto f(X) = f(x_1, ..., x_n)$ une fonction de classe C^2.

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on note $H(X) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ la matrice Hessienne de f en x.

a) [1.5 pt] Soient X_0 et $Z \in \mathbb{R}^n$. On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \ t \longmapsto f(X_0 + tZ)$. Ainsi, φ de classe C^2.

Montrer à l'aide du DL de f en X_0 que $\varphi''(0) = \langle Z, AZ\rangle$, où A est la matrice $H(X_0)$.

Plus généralement, on a donc (*admis ici*) : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi''(t) = \langle Z, AZ\rangle$, où A est la matrice $H(X_0 + tZ)$.

b) [1 pt] On suppose désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $H(X)$ est une matrice symétrique positive.

Avec les notations de a), montrer que φ est convexe.

c) [1 pt] En déduire que f est convexe, c'est-à-dire que

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda) f(X) + \lambda f(Y)$$

d) [1.5 pt] Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Déduire de b) que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(X) \geq f(X_0) + \langle \operatorname{grad} f(X_0), X - X_0\rangle$$

Interpréter géométriquement ce résultat lorsque $n = 2$ en terme de plan tangent.

7) Soit a, b, c trois vecteurs dans $E = \mathbb{R}^2$. Soit un réel $p \geq 2$. On considère $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \ \ f(x) = \|x-a\|^p + \|x-b\|^p + \|x-c\|^p \text{ , où } \|\ \| \text{ est la norme euclidienne usuelle}$$

On pose $s = f(\overrightarrow{0}) = \|a\|^p + \|b\|^p + \|c\|^p$.

Remarque : On pourra, lorsque cela est nécessaire, noter (x_1, x_2) les coordonnées du vecteur x.

Remarque : Comme $p \geq 2$, alors $t \longmapsto t^{p/2}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, donc f est de classe C^1 sur E.

a) [1 pt] Proposer une constante β que pour tout $x \in E$ vérifiant $\|x\| \geq \beta$, on a $f(x) \geq 3\,(\|x\| - \beta)^p$.

On en déduit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

b) [1.5 pt] En déduire avec soin que f admet un minimum (c'est-à-dire que $\inf f$ est atteinte).

Indication : On pourra considérer $K = \{x \in E \mid f(x) \leq s\}$.

c) [1.5 pt] Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que

$$\|x-a\|^{p-2} \ \ (x-a) + \|x-b\|^{p-2} \ \ (x-b) + \|x-c\|^{p-2} \ \ (x-c) = \overrightarrow{0}$$

d) *Question supplémentaire.* On suppose les points a, b, c non alignés.

En utilisant notamment les propriétés de $t \longmapsto t^p$, montrer que $\inf f$ est atteinte en un unique point.