Interrogation n°16. Corrigé

1) a) On considère la norme subordonnée à la norme $\| \ \|$, c'est-à-dire $N(A) = \sup_{X \neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

b) $\rho(A) \leq N(A)$, donc 1 n'est pas valeur propre de A, c'est-à-dire $I_p - A$ inversible.

c) On a (par linéarité) : $X_{n+1} - Z = A(X_n - Z)$, donc $X_n - Z = A^n(X_0 - Z)$.

On a donc $\|X_n - Z\| \leq N(A)^n \|X_0 - Z\|$, donc par pincement, $\lim_{n\to+\infty} X_n = Z$.

d) On choisit $X_0 = 0$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n \in F$. En effet, F est un sev stable par $f : X \longmapsto AX + B$.

F est un sev (de dimension finie), donc F est fermé, et ainsi $Z = \lim_{n\to+\infty} X_n \in \overline{F} = F$.

Remarque : En fait, on a $Z = (I_p - A)^{-1}B = (\sum_{n=0}^{+\infty} A^n)B$.

Et toute matrice de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ appartient en fait à $\mathrm{Vect}(I, A, ..., A^{r-1})$ sev fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
En effet, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ est limite de matrices $P_n(A)$, et $P_n(A) = R_n(A) \in \mathrm{Vect}(I, A, ..., A^{r-1})$ par division euclidienne.
Donc $\lim_{n\to+\infty} |T^n| = O_p$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} T^n = O_p$.

2) On considère $g(t) = f(\gamma(t))$. On a g de classe C^1 et $g'(t) = \mathrm{grad}\, f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

On en déduit $g(1) - g(0) = \int_0^1 \mathrm{grad}\, f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt$.

Par l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$|g(1) - g(0)| \leq \int_0^1 \|\mathrm{grad}\, f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\|\ \ dt \leq \int_0^1 \|\mathrm{grad}\, f(\gamma(t))\| \, \|\gamma'(t)\|\ \ dt$.

D'où $|g(1) - g(0)| \leq \int_0^1 M \|\gamma'(t)\|\ \ dt = M \times L$.

3) On a aussi $f(x,0) = \varphi(|x|) = \mathfrak{o}\ (x)$, car $\varphi'(0) = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})$.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \left|\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\right| \to 0$ lorsque (x,y) tend vers 0.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en $(0,0)$.

4) Il s'agit des fonctions $f(x,y) = A(y)\exp(x) + B(y)\exp(-x)$, avec A et B de classe C^2.

Remarque : Pour prouver que A et B sont C^2, on exprime $A(y)$ et $B(y)$ en fonction de $f(0,y)$ et $f(1,y)$.

5) On a $\dfrac{\partial g}{\partial b}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a+b, ab) + a\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+b, ab)$.

Et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(a,b) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+b, ab) + (a+b)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+b, ab) + ab\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+b, ab) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a+b, ab)$.

6) a) On a $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = (\cos\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + (\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Donc $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\alpha}{r}g(r,\theta)$: on applique (E) avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

b) En fixant θ, on est ramené à une équation différentielle de la forme $G'(r) = \dfrac{\alpha}{r}G(r)$, donc $G(r) = kr^\alpha$.

Comme la constante dépend de θ, on obtient $g(r,\theta) = k(\theta)r^\alpha$.

On a $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, car $x > 0$. Et $r^\alpha = x^\alpha\left(1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right)^{\alpha/2}$. Donc $f(x,y)$ est bien de la forme $F\left(\dfrac{y}{x}\right)x^\alpha$.

Remarque : On pourrait aussi résoudre avec le changement de variable $(u, v) = \left(x, \dfrac{y}{x}\right)$.

7) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On considère $\varphi(t) = f(tx) - \left(\text{grad}\, f(\overrightarrow{0}) \mid tx\right) = f(tx) - t\left(\text{grad}\, f(\overrightarrow{0}) \mid x\right)$.

On a $\forall t$, $\varphi'(t) = (\text{grad}\, f(tx) \mid x) - \left(\text{grad}\, f(\overrightarrow{0}) \mid x\right) = \left(\text{grad}\, f(tx) - \text{grad}\, f(\overrightarrow{0}) \mid x\right)$.

Or, $\left(\text{grad}\, f(tx) - \text{grad}\, f(\overrightarrow{0}) \mid tx\right) \geq 0$, donc $\forall t \geq 0$, $\varphi'(t) \geq 0$.

Comme $\varphi(0) = 0$, alors $\varphi(1) \geq 0$.

8) a) f est continue sur S compact (fermé borné) donc f est majorée et atteint sa borne supérieure.

On a $g'(\theta_0) = 0$, donc $-\sin\theta_0 \dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0) + \cos\theta_0 \dfrac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 0$, c'est-à-dire $\det(X_0, \text{grad}\, f(X_0)) = 0$.

b) Soit $v \in H_0 : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. On considère $g(t) = f(X_0 + tV)$.

g atteint son maximum en $t = 0$. Donc $g'(0) = 0$, c'est-à-dire $\text{grad}\, f(X_0) \cdot v = 0$.

Donc $\text{grad}\, f(X_0)$ appartient à $H_0^\perp$, c'est-à-dire $\text{grad}\, f(X_0)$ est colinéaire à n.

9) a) On pose $H = Y - X$.

On a $|f(Y) - f(X)| = \left|\int_0^1 \text{grad}\, f(X + tH) \cdot H \; dt\right| \leq \int_0^1 |\text{grad}\, f(X + tH) \cdot H| \; dt \leq \int_0^1 \|H\| \; dt = \|H\|$.

Il y a égalité ssi $\forall t \in [0, 1]$, $|\text{grad}\, f(X + tH) \cdot H| = \|H\|$, donc ssi $\text{grad}\, f(X + tH) = \pm \dfrac{H}{\|H\|}$.

(*Remarque* : par continuité de $\text{grad}\, f$, le $\pm$ ne dépend pas de t).

Remarque : Pour justifier rigoureusemet le cas d'égalité, il faut utiliser la propriété : si g et h sont continues avec $g \leq h$ sur $[0, 1]$, alors $\int_0 g = \int_0^1 h$ ssi $g = h$: on se ramène au cas connu en considérant $\delta = h - g$.

b) On a $f(X) = \|X\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, donc $\text{grad}\, f(X) = \left(\dfrac{x_j}{\|X\|}\right)_{1 \leq j \leq n} = \dfrac{X}{\|X\|}$. D'où le résultat.

c) Posons $g(t) = f(X(t))$. On a $g'(t) = \text{grad}\, f(X(t)) \cdot X'(t) = 1$.

Donc $|f(X(t)) - f(X(s))| = |g(t) - g(s)| = |t - s|$.

Or, on a $\geq \|X(t) - X(s)\| \leq \int_s^t \|X'(t\| \; dt = |t - s|$. donc $|f(X(t)) - f(X(s))| \geq \|X(t) - X(s)\|$.

On déduit de a) que $\|X(t) - X(s)\| \leq |f(X(t)) - f(X(s))|$.

Comme il y a égalité dans a), le gradient est constant sur le segment $[X(t), X(s)]$.

d) On en déduit (via Cauchy-Lipschitz admis ici pour les équations non linéaires) que les trajectoires $t \longmapsto X(t)$ sont des droites le long desquelles le gradient est contant. Ces différentes droites ne peuvent se croiser (sinon, le gradient prendrait deux valeurs différentes. Donc les droites sont parallèles, et comme elles sont dirigées par le gradient, le gradient est constant.