Interrogation n°16. *Barème sur 22.5 pts*

1) On munit $\mathbb{C}^p$ de la norme $\|X\| = \sup_{1\le j\le p} |x_j|$, pour $X = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{C}^p$.

a) [1 pt] Proposer *sans justification* une norme d'algèbre N sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{C}^p,\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2, \qquad \|AX\| \le N(A)\,\|X\| \ \text{ et } \ N(AB) \le N(A)N(B)$$

On considère désormais une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\boxed{N(A) < 1}$.

Soient $X_0 \in \mathbb{C}^p$ et $B \in \mathbb{C}^p$. On considère la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_{n+1} = AX_n + B$.

b) [1 pt] Donner sans justification la propriété qui fait qu'il existe un unique vecteur $Z \in \mathbb{C}^p$ tel que $Z = AZ + B$.

c) [1.5 pt] Montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n = Z$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|X_n - Z\| = 0$.

Indication : En posant $Y_n = X_n - Z$, exprimer Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.

d) [2 pts] On sait que A admet un polynôme annulateur : il existe $r \le p$ et $(a_0, ..., a_{r-1}) \in \mathbb{C}^r$ tels que

$$A^r = \sum_{j=0}^{r-1} a_j A^j$$

On considère le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}(B, AB, A^2B, ..., A^{r-1}B)$ dans $\mathbb{C}^p$.

Montrer que $Z \in F$.

Indication : Noter (on ne demande pas de le justifier) que F contient B et est est stable par $f : X \longmapsto AX + B$.

2) [2 pts] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \ x \longmapsto f(x)$ de classe C^1 et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

Soit M un réel positif. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|\text{grad}\, f(x)\| \le M$.

Montrer que $|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| \le M \times L$, où $L = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \ dt$.

3) [2.5 pts] Soit $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ \ (x,y) \longmapsto \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

On suppose $\varphi'(0) = 0$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$.

4) [2 pts] Donner *sans justification* les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \to f(x,y)$ de classe C^2 vérifiant $(E) : \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f$.

5) [2 pts] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ \ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2.

On pose $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $g(a,b) = f(a+b, ab)$. Exprimer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial a \partial b}(a,b)$ en fonction des dérivées de f.

6) On pose $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $\alpha > 1$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^1 vérifiant $(E) : x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$.

a) [1.5 pt] On pose $\forall (r,\theta) \in]0, +\infty[\times \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Trouver une relation entre $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $g(r,\theta)$.

b) [2 pts] En déduire que f est de la forme $f(x,y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right) x^{\alpha}$.

7) [2 pts] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto f(x)$ de classe C^2. On note $(\ \mid\ )$ le produit scalaire canonique.

On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\left(\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(\overrightarrow{0}) \mid x\right) \geq 0$.

En utilisant une fonction auxiliaire, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \geq f(\overrightarrow{0}) + \left(\operatorname{grad} f(\overrightarrow{0}) \mid x\right)$.

8) *Les deux questions sont indépendantes.*

a) [1 pt] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On considère S le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

On pose $M = \sup\{f(X),\ X \in S\}$. Justifier l'existence de $X_0 \in S$ tel que $f(X_0) = M$.

On pose $X_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0) \in S$. Montrer que $\operatorname{grad} f(X_0)$ est colinéaire à X_0.

Indication : Considérer $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$, et utiliser le fait que g atteint son maximum en θ_0.

b) [2 pts] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

On considère H un hyperplan affine d'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$, avec $n = (a_1, ..., a_n) \neq \overrightarrow{0}$.

On suppose que $\sup\{f(X),\ X \in H\}$ est atteint en un point X_0. Montrer que $\operatorname{grad} f(X_0)$ est colinéaire à n.

Indication : On pourra considérer un vecteur arbitraire v dans l'hyperplan $H_0 : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

9) *Exercice supplémentaire*

On considère $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose $\|\operatorname{grad} f(X)\| = 1$.

a) Soit X et $Y \in U$ tels que $[X, Y] \subset U$. Montrer que $|f(Y) - f(X)| \leq \|Y - X\|$.

Préciser sans justification les cas d'égalité.

b) *Un exemple* : On prend $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Vérifier que $f : X \longmapsto \|X\|$ vérifie $\|\operatorname{grad} f(X)\| = 1$.

c) On considère une fonction $X : t \longmapsto X(t)$ vérifiant l'équation différentielle $X'(t) = \operatorname{grad} f(X(t))$.

Montrer que $|f(X(t)) - f(X(s))| = |t - s| = \|X(t) - X(s)\|$.

Que peut-on en déduire quant au gradient sur les segments $[X(t), X(s)]$?

d) ($\bigstar\bigstar$) On prend $U = \mathbb{R}^n$. Sans détailler tous les arguments, montrer que f est affine.

Remarque culturelle : L'exemple du b) montrer que la propriété est fausse lorsque $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.