Interrogation n°15 spécifique evn. Corrigé.

1) On a $|\|\vec{x}_n\| - \|\vec{x}\|| \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}\|$, donc par pincement, $\lim_{n\to+\infty} \|\vec{x}_n\| = \|\vec{x}\|$.

Variante : L'application $\vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\|$ est 1-lispchitzienne (seconde inégalité triangulaire), donc continue.

2) a) Par l'inégalité des accroissements finis, on a $|f(t) - f(a)| \leq (b-a)\sup_{[a,b]}|f'|$, donc $\|f\| \leq |f(a)| + (b-a)\sup_{[a,b]}|f'|$.

On en déduit que $k = \max(1, b-a)$ convient.

b) Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(t) = \sin(nt)$. Pour n assez grand, $N(f_n) = n$ et $\|f_n\| = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|} = +\infty$.

On en déduit que les normes N et $\|\ \|$ ne sont pas équivalentes.

3) a) On a $N(P) \geq 0$. Supposons $N(P) = 0$. L'intégrale d'une fonction continue positive est nulle ssi la fonction est identiquement nulle. Donc $\forall t \in [0,1]\ \ P(t) = 0$, donc $P = 0$ (car P admet une infinité de racines).

On a $N(\lambda P) = \int_0^1 |\lambda P(t)|\,dt = |\lambda|\,N(P)$. Et $N(P+Q) = \int_0^1 |(P+Q)(t)|\,dt \leq \int_0^1 (|P(t)| + |Q(t)|)\,dt = N(P) + N(Q)$.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$. On a $N(P) = \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^n a_k t^k\right| dt \leq \sum_{k=0}^n \int_0^1 |a_k|\, t^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}|a_k| \leq \|P\|$.

b) On a $P_n = (X-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k} X^k$, donc $\|P_n\| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Et $N(P_n) = \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\|P_n\|}{N(P_n)} = +\infty$, donc les normes ne sont pas équivalentes.

4) Montrons que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est limite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi A est trigonalisable, c'est-à-dire ssi son polynôme caractéristique est scindé.

Supposons A trigonalisable. La propriété est immédiate si A est diagonalisable.

Sinon, on sait par le cours que $A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P$. Alors $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$, où $A_n = P^{-1}\begin{pmatrix} \mu_n & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P$ et $\mu_n = \lambda + \dfrac{1}{n}$.

Or, A_n est diagonalisable, car son polynôme caractérisque $(X - \mu_n)(X - \lambda)$ est scindé à racines simples.

Donc A est bien limite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, supposons que A soit limite de matrices diagonalisables.

Alors le polynôme caractéristique de A est limite des polynômes caractérisques des A_n.

Donc il est de même de leurs discriminants. Comme les discriminants des polynômes caractérisques des A_n sont positifs (puisque le polynôme caractéristique sont scindés), il en est de même de celui de A. D'où le résultat.

5) On résout l'équation différentielle $y' + y = f$ en utilisant la méthode de varaition de la constante.

En posant $y(x) = z(x)e^{-x}$, l'équation s'écrit $z'e^{-x} = f(x)$. D'où $g = u(f)$ est défini par $g(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)e^t \, dt$.

Donc, $\forall x \geq 0$, $|g(x)| \leq e^{-x} \int_0^x |f(t)| \, e^t \, dt \leq \|f\|_\infty \, e^{-x} \int_0^x e^t \, dt \leq \|f\|_\infty$, car $\int_0^x e^t \, dt \leq e^x$.

Donc $\|u(f)\|_\infty = \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et ainsi u est 1-lipschitzienne.

De plus, si f est constante de valeur λ, on a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lambda$, d'où $\|u(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$ dans ce cas.

On en conclut que $|||u||| = 1$.

6) a) Posons $C = AB$.

On a : $\sum_{i=1}^n |c_{ik}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}b_{jk}| = \sum_{j=1}^n |b_{jk}| \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right) \leq \sum_{j=1}^n |b_{jk}| \, N(A) \leq N(A)N(B)$.

b) - On vérifie d'abord que $\|AX\|_1 \leq N(A) \, \|X\|_1$.

En effet, en posant $Y = AX$, on a :

$\|Y\|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right) |x_j| \leq \sum_{j=1}^n N(A) \, |x_j| = N(A) \, \|X\|_1$.

- On trouve ensuite un vecteur non nul pour lequel il y a égalité :

Il existe j tel que $N(A) = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

On considère le vecteur $X = E_j$ (vecteur canonique) : On a $\|E_j\|_1 = 0$ et $\|AE_j\|_1 = \|A_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = N(A)$.

d) On a $\|ABX\|_1 \leq N(A) \, \|BX\|_1 \leq N(A)N(B) \, \|X\|_1$, donc $\|AB\|_1 \leq N(A)N(B)$.

7) a) b) *Cas I* : $\Delta_A = \{\lambda I_2\}$ est fermée et bornée.

Cas II : $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \Delta_A$ pour tout $\alpha \neq 0$, donc Δ_A n'est pas bornée.
Et $\lim_{\alpha\to 0} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \notin \Delta_A$, donc Δ_A n'est pas fermée.

Cas III : $M \in \Delta_A$ ssi son polynôme caractéristique admet λ et μ comme racines (il est alors scindé à racines simples),

donc ssi $\operatorname{tr} M = \lambda + \mu$ et $\det M = \lambda\mu$.

En particulier, $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \Delta_A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Donc Δ_A n'est pas bornée (on fait tendre $\alpha \to +\infty$).

D'autre part, les relations $\operatorname{tr} M = \lambda + \mu$ et $\det M = \lambda\mu$ sont stables par passage à la limite (car tr et det sont continues), donc Δ_A est fermée.

8) Comme A est fermé, on vérifie aisément que $\mu \in J$, c'est-à-dire que $c = a + \mu(b - a) \in A$. Comme $b \in B$, alors $\mu < 1$. Mais comme A est ouvert, tout point au voisinage de c appartient à A, donc $\mu + \varepsilon \in J$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, d'où une contradiction.

9) a) L'unique propriété non nécessairement vérifiée est : $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$, $N(P) = 0 \Rightarrow P = 0$. Il résulte des propriétés d'interpolation de Lagrange qu'un polynôme de degré $\leq n$ est entièrement déterminé par ses valeurs en $n+1$ points. Donc une CNS est : $\operatorname{card}\Omega \geq n+1$. En particulier, si $\operatorname{card}\Omega < n$, alors $N(P) = 0$ lorsque P est le produit des $(X - z)$, où $z \in \Omega$.

b) On considère la norme N définie en a) et la norme $\| \ \|$définie par $\|P\| = \sup_{0\leq k\leq n} |a_k|$ lorsque $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Comme $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension finie, les normes sont équivalentes.

Donc il existe $k > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$, $N(P) \geq k \|P\|$. Or, pour tout $P \in E_n$, P est unitaire, donc $\|P\| \geq 1$.

On en conclut que $\forall P \in E_n$, $N(P) \geq k$. Donc $\inf_{P\in E_n} (\sup_{z\in\Omega} |P(z)|) > 0$.

10) a) On a $\forall a \in A$, $f(a) \leq g(a) + M$.

Donc $\forall a \in A$, $f(a) \leq \sup g + M$, c'est-à-dire $\sup f \leq \sup g + M$.

Comme f et g jouent un rôle symétrique, on a aussi : $\sup g \leq \sup f + M$. Donc $|\sup f - \sup g| \leq M$.

On a donc aussi $|\sup(-f) - \sup(-g)| \leq M$, en appliquant la propriété aux fonctions f et g.

C'est-à-dire : $|\inf f - \inf g| \leq M$, car $\sup(-f) = -\inf f$.

b) Soient x et $y \in A$.

On va appliquer a) à $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ définies par $f(a) = |x - a|$ et $g(a) = |y - a|$.

On a $|f(a) - g(a)| \leq |x - y|$ par la seconde inégalité triangulaire.

Par a), on obtient bien $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.

11) a) Soit a et $b \in \overline{C}$. On a $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ et $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$, avec a_n et $b_n \in C$.

Pour $\lambda \in [0, 1]$, $x = (1 - \lambda)a + \lambda b = \lim_{n\to+\infty}(1 - \lambda)a_n + \lambda b_n$ et $(1 - \lambda)a_n + \lambda b_n \in C$, alors $x \in \overline{C}$.

Donc $\overline{C}$ est convexe.

b) Soit a et b intérieurs à C. Alors il existe ε et $\varepsilon' > 0$ tels que $B(a, \varepsilon)$ et $B(b, \varepsilon)$ sont incluses dans C.

Quitte à prendre le minimum des deux, on peut supposer $\varepsilon = \varepsilon'$. Posons $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$, où $\lambda \in [0, 1]$.

Alors $B(x, \varepsilon)$ est inclus dans C. En effet, tout élément $z \in B(x, \varepsilon)$ s'écrit $x + u$, avec $\|u\| \leq \varepsilon$.

On a $z = (x + u) = (1 - \lambda)(a + u) + \lambda(b + u)$. Comme $a + u$ et $b + u \in C$, alors $x + u \in C$. D'où le résultat.