Interrogation n°15 spécifique sur les espaces vectoriels normés

1) [0.5 pt] Soit $(\overrightarrow{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un evn $(E, \|\|)$ convergeant vers $\overrightarrow{x}$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \|\overrightarrow{x_n}\| = \|\overrightarrow{x}\|$.

2) [2 pts] On note $E = C^1([a,b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de classe C^1 sur $[a,b]$.

Pour tout $f \in E$, on considère les normes $\|f\| = \sup_{[a,b]} |f|$ et $N(f) = |f(a)| + \sup_{[a,b]} |f'|$.

Déterminer un réel k tel que $\forall f \in E$, $\|f\| \leq kN(f)$. Les normes $\| \ \|$ et N sont-elles équivalentes ?

3) On note $E = \mathbb{R}[X]$, et $\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, $\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N(P) = \int_0^1 |P(t)|\, dt$.

a) [2 pts] Justifier (brièvement) que N est une norme sur E, et montrer que $\forall P \in E,\ N(P) \leq \|P\|$.

b) [1.5 pt] En considérant $P_n = (1-X)^n$, montrer que les normes $\| \ \|$ et N ne sont pas équivalentes.

4) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une CNS sur A pour que A soit limite de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5) [2 pts] On considère E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in [0, +\infty[\}$.

Pour tout $f \in E$, on définit $u(f)$ l'unique fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant $g(0) = 0$ et $g' + g = f$.

Expliciter $u(f)$, et montrer que $u : E \to E$ est bien définie et 1-lipschitzienne, et en déduire la norme triple $|||u|||$.

6) (*inspiré des concours Centrale et X PC*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

Pour $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\boxed{N(A) = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}$.

Pour tout vecteur $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$, , on pose $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Attention : Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) [1.5 pt] Montrer que pour toutes matrices A et $B \in M_n(C)$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

b) [2 pts] Montrer que $N(A) = \sup_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$. On trouvera un cas d'égalité.

c) [1 pt] Déduire de b) une nouvelle preuve de la propriété du a).

7) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice d'ordre 2 à coefficients complexes.

On considère trois cas :

Cas I : $A = \lambda I_2$; Cas II : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$; Cas III : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq \mu$.

On note Δ_A la classe de similitude de A, c'est-à-dire : $M \in \Delta_A$ ssi $\exists\, P \in GL_2(\mathbb{C})$, $M = P^{-1}AP$.

a) [1.5 pt] Déterminer dans chaque cas si Δ_A est une partie bornée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) [1.5 pt] Déterminer dans chaque cas si Δ_A est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

8) [1 pt] On pose $E = \mathbb{R}^p$.

On veut prouver que $\emptyset$ et E sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E.

On veut prouver qu'il existe une partie A de $\mathbb{R}^p$ telle que d'une part A et $B = E \setminus A$ sont ouverts et fermés (du fait du propriété du complémentaire), et d'autre part A et B non vides.

On considère $a \in A$ et $b \in B$.

En considérant $\mu = \sup J$, où $J = \{\lambda \in [0,1] \mid a + \lambda(b-a) \in A\}$, aboutir à une contradiction.

9) Soit Ω une partie de $\mathbb{C}$. On note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.

a) [1 pt] Donner sans justification une CNS sur Ω pour que $N(P) = \sup_{z\in\Omega} |P(z)|$ définisse une norme sur $\mathbb{C}_n[X]$.

b) [1 pt] ($\bigstar$) On suppose que a) est vérifié. Démontrer que $\inf_{P\in E_n} \left(\sup_{z\in\Omega} |P(z)|\right) > 0$.

10) a) [1.5 pt] Soient f et $g : A \to \mathbb{R}$.

On suppose que $\forall a \in A$, $|f(a) - g(a)| \leq M$, où M est un réel fixé.

Montrer que $|\sup f - \sup g| \leq M$, et en déduire : $|\inf f - \inf g| \leq M$.

b) [1 pt] Soit A une partie non vide d'un evn E. Pour $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|,\, a \in A\}$.

Déduire de a) que l'application $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \longmapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq |x - y|$$

11) Soit C une partie convexe de E.

a) [1 pt] Démontrer que l'adhérence de C est convexe.

b) [1.5 pt] ($\bigstar$) Démontrer que l'intérieur de C est convexe.