Interrogation n°15. Corrigé

Partie A. Questions indépendantes

1) Les v.a. X et $\dfrac{1}{Y}$ sont équivalentes, donc $M_n = E(X_n)E\left(\dfrac{1}{Y_n}\right)$.

On a $E(X_n) = \dfrac{1}{n}(\sum_{k=1}^n k) = \dfrac{n+1}{2} \sim \dfrac{n}{2}$ et $E\left(\dfrac{1}{Y_n}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}\right) \sim \dfrac{\ln n}{n}$, donc $M_n \sim \dfrac{\ln n}{2}$.

2) Pour $x, y \in E$, $\|u(x) - u(y)\| \leq k\,\|u(x-y)\| \leq k\,\|x-y\|$. Donc u est k-lipschitzienne, donc continue.

3) a) L'application est linéaire en dimension finie donc continue.

Variante : les coefficients de $P^{-1}MP$ sont de la forme $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \alpha_{ij}m_{ij}$, où les α_{ij} dépendent de P et P^{-1}.

b) A est diagonalisable et il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$, où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Par a) appliqué à $M \longmapsto P^{-1}MP$ et à $M \longmapsto PMP^{-1}$, on a :

$\lim_{n\to+\infty} A^n = O_p$ ssi $\lim_{n\to+\infty} D^n = O_p$, donc ssi $\forall i,\ |\lambda_i| < 1$.

4) a) On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \|x\|)$. En effet : Supposons $\|y - x\| \leq \varepsilon$. On a $\|y\| \leq \|x\| + \varepsilon < 1$.

b) Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F convergeant vers $(x, y) \in \overline{F}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n = 1$ et $x_n > 0$, donc par passage à la limite, $xy = 1$ et $x \geq 0$.

Comme $xy = 1$, x n'est pas nul, donc $x > 0$. On en conclut $(x, y) \in F$ et donc F fermée.

5) On a $A^{2k} = A^k A^k$, d'où par passage à la limite, $B^2 = B$.

Remarque : On utilise la continuité de $(M, N) \longmapsto MN$.

6) a) On a $|||u||| = \sup_{x\in E\smallsetminus\{\overrightarrow{0}\}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\overrightarrow{x}\in E\smallsetminus\{\overrightarrow{0}\}} \left\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$.

Lorsque x décrit $E \smallsetminus \{\overrightarrow{0}\}$, $\dfrac{x}{\|x\|}$ décrit la sphère unité S, d'où le résultat.

b) Il existe x non nul tel que $u(x) = \lambda x$, donc $\|u(x)\| = |\lambda|\,\|x\|$, d'où on déduit que $|||u||| \geq |\lambda|$.

c) $x \longmapsto \|u(x)\|$ est continue suir le compact S, donc atteint son maximum en un point x_0.

d) Par définition du x_0 au d), on a $\varphi'(0) = 0$. Donc on a $\langle u(x_0), u(h)\rangle - 2\,\|u(x_0)\|^2\,\langle x_0, h\rangle$, c'est-à-dire

$$\left\langle (u^T \circ u)(x_0) - \|u(x_0)\|^2\, x_0, h\right\rangle = 0$$

Comme h est arbitraire, on obtient $(u^T \circ u)(x_0) = \|u(x_0)\|^2\, x_0$, donc x_0 vecteur propre de $(u^T \circ u)$.

Remarque : u^T est l'endomorphisme adjoint de u, défini par $\left\langle u^T(x), y\right\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.

7) On a $|f(u)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n u_n| \leq \|u\| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$. Donc f est continue (lipschitzienne de rapport $k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$).
D'autre part, en posant $u_n = \mathrm{sgn}(a_n)$, on a $|f(u)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ et $\|u\| = 1$, d'où l'égalité. Donc $|||f||| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Partie B. Borne inférieure d'une forme linéaire sur une partie convexe fermée

1) a) Soient P et $Q \in A_n$. Soit $R \in [P, Q]$. Il existe donc $\lambda \in [0, 1]$ tel que $R = \lambda P + (1 - \lambda)Q$.

Alors $\deg R \leq n$, et $R(1) = \lambda + (1 - \lambda) = 1$ et de même $R(-1) = 1$.

Et pour tout $x \in [-1, 1]$, $R(x) = \lambda P(x) + (1 - \lambda)Q(x) \geq 0$, car λ et $1 - \lambda$ sont positifs.

On en déduit que le segment $[P, Q]$ est inclus dans A_n. Donc A_n est une partie convexe de E_n.

b) Vérifions que $P \longmapsto \|P\|_1$ est une norme sur E_n.

- $\|P\|_1 \geq 0$.

- Supposons $\|P\|_1 = 0$.Comme $t \longmapsto |P(t)|$ continue positive, alors $\forall t \in [-1,1]$, $|P(t)| = 0$.

Donc P s'annule sur $[-1,1]$, qui est infini, donc $P = 0$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda P\|_1 = |\lambda| \, \|P\|_1$.

- $\|P+Q\|_1 = \int_{-1}^{+1} |P(t) + Q(t)| \ dt \leq \int_{-1}^{+1} |P(t)| + |Q(t)| \ dt = \|P\|_1 + \|Q\|_1$.

Donc $P \longmapsto \|P\|_1$ est une norme sur E_n.

c) *On munit E_n de la norme de la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$.*

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A_n convergeant vers P pour la norme $\| \ \|_\infty$.

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Ainsi, pour tout $t \in [-1,1]$, $P(t) = \lim_{n\to+\infty} P_k(t)$, donc $P(1) = P(-1) = 1$ et $P(t) \geq 0$.

Donc A_n est une partie fermée de E_n pour $\| \ \|_\infty$, donc pour $\| \ \|_1$, puisque les normes sont équivalentes en dim finie.

Variante : On considère, pour $x \in [0,1]$, l'application $\phi_x : E_n \to \mathbb{R} \quad P \longmapsto P(x)$.

L'application ϕ_x est continue.

Et on a : $P \in A_n$ ssi $\phi_1(P) = 1$, $\phi_{-1}(P) = 1$ et $\forall x \in [0,1]$, $\phi_x(P) \geq 0$.

Ainsi, A_n est définie par des inégalités larges associées à des fonctions continues, donc ces inégalités sont stables par passage à la limite (pour toute norme), donc A_n est fermée.

2) a) K_n n'est pas vide, car le polynôme $1 \in K_n$.

Il existe donc $m_n = \inf\{\phi(P),\, P \in K_n\}$. On a nécessairement $m_n \leq 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } P \in K_n,\ \|P\|_1 \geq m_n \\ \text{Pour } P \in A_n \setminus K_n,\ \|P\|_1 \geq 2 \geq m_n \end{array} \right. \text{, donc } \mu_n \geq m_n.$$

Comme $K_n \subset A_n$, alors on a aussi $\mu_n \leq m_n$. Donc on a bien $\mu_n = m_n$

b) K_n est l'intersection de A_n et de la boule de centre 0 et de rayon 2 pour la norme $\| \ \|_1$.

K_n est fermée (comme intersection de deux fermés) et borné.

Pour $P \in A_n$, on a $|\phi(P)| \leq \int_{-1}^{+1} |P(t)| \ dt = \|P\|_1$.

Par linéarité, $\phi : E_n \to \mathbb{R}$ est donc 1-lipschitzienne, et a fortiori continue.

Donc ϕ est bornée et atteint ses bornes sur K_n.

Il existe donc $P \in K_n \subset A_n$ tel que $\phi(P) = \mu_n$.

c) Soient P et $Q \in B_n$ et $\lambda \in [0,1]$. On sait déjà par 1.a) que $\lambda P + (1-\lambda)Q \in A_n$.

Par linéarité, $\phi(\lambda P + (1-\lambda)Q) = \lambda\phi(P) + (1-\lambda)\phi(Q) = \lambda\mu_n + (1-\lambda)\mu_n = \mu_n$.

Donc B_n est convexe.

d) Il existe $P \in B_n$. On considère le polynôme $Q(X) = P(-X)$.

Comme $P \in A_n$, on vérifie aisément que $Q \in A_n$.

De plus, $|\phi(P)| = \int_{-1}^{+1} |P(t)| \ dt = \int_{-1}^{+1} |P(-u)| \ du = \int_{-1}^{+1} |Q(u)| \ du = |\phi(Q)|$.

Donc $Q \in B_n$. Comme B_n est convexe, alors $\frac{1}{2}(P+Q) \in B_n$.

Ainsi, le polynôme pair $\frac{1}{2}(P(X) + P(-X))$ appartient à B_n.