Interrogation n°14. Corrigé

1) a) Soit $\rho \geq 0$. La suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi $(a_{2n}\rho^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1}\rho^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Donc $R = \sup(\Delta_0 \cap \Delta_1) = \min(R_0, R_1)$, car $\Delta_0 = [0, R_0)$ et $\Delta_1 = [0, R_1)$.

Remarque : La parenthèse signifie [ou]

b) $\sum a_n z^{2n}$ converge ssi $\sum a_n (z^2)^n$ converge : on a donc $\begin{cases} \left|z^2\right| < R \Rightarrow \sum a_n z^{2n} \text{ converge abs} \\ \left|z^2\right| > R \Rightarrow \sum a_n z^{2n} \text{ divverge} \end{cases}$

Donc $R' = \sqrt{R}$.

c) On déduit de a) et b) que $R = \min(\sqrt{r_0}, \sqrt{r_1})$.

2) a) On a $H_n \sim \ln n$. Comme $H_n = O(n)$, alors $R \geq 1$.

Comme $\sum H_n$ diverge, alors $R \leq 1$.Donc $R = 1$.

b) $f(x)$ est le produit de Cauchy de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{x_n}{n}$, donc $f(x) = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

3) a) On a $g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u^{n-1} = \left(\dfrac{1}{1-u}\right)' = \dfrac{1}{(1-u)^2}$, donc $M = \dfrac{1-q}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{1-q}$.

Remarque : Il s'agit de l'espérance d'une v.a. de loi géométrique $G(p)$.

b) $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$, donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, car $f(0) = 0$.

Remarque : Il s'agit en fait d'obtenir la somme des termes impairs de $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$.
D'où l'expression $\dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$.

c) On a $S = \operatorname{ch}(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2 + 1/2}{2} = \dfrac{5}{4}$.

d) $f(x) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(in\dfrac{2\pi}{3}\right) x^n\right) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-jx}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-jx} + \dfrac{1}{1-\overline{j}x}\right) = \dfrac{1 - x/2}{1+x+x^2}$.

4) a) La série de fonctions $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, car la série des dérivées $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Donc $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} = \arctan(x)$, et comme $f(0) = 0$, on a $S = f(1) = \int_0^1 \arctan(x)\,dx$.

b) En intégrant par parties, $\int_0^1 \arctan(x)\,dx = t\arctan t - \int_0^1 \dfrac{t}{1+t^2}\,dt = t\arctan t - \dfrac{1}{2}\ln(1+t) + k$.

Donc $S = \arctan 1 - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

Remarque : Méthode directe : $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+2}$.

Donc $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} - \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} = \arctan(1) - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

5) a) On a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{2(2n+1)}{(n+1)} \to 4$, donc $R = \dfrac{1}{4}$ (par le critère de D'Alembert).

b) On a $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$.

Donc $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = 4xf'(x) + 2f(x)$, donc $f'(x) = \dfrac{2}{1-4x} f(x)$.

6) a) Pour $x \in]-R, R[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ donc $f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$.

Par idenfification des coefficients, on a : $f(x) = f(-x)$ sur $]-R, R[$ ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (-1)^n a_n$.

Donc f est paire ssi a_n est nul pour tout n impair.

Variante : On utilise $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$: Pour tout n impair, $f^{(n)}$ est impaire donc $f^{(n)}(0) = 0$.

b) Supposons f non identiquement nulle. Alors il existe un plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$.

On a alors $f(x) \sim a_n x^n$ par Taylor-Young, donc $f(\frac{1}{k}) \sim a_n (\frac{1}{k})^n$ lorsque $k \to +\infty$.

D'où une contradiction avec $f(\frac{1}{k}) = 0$ pour k assez grand.

Remarque : Plus généralement,s'il existe une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(z_n) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$ (appelé principe des zéros isolés).

7) a) Supposons $E(|X|) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n < +\infty$.

La série des dérivées $x \longmapsto \sum n a_n x^{n-1}$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Donc G est C^1 sur $[0, 1]$, et en particulier $G'(1)$ existe et vaut $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$.

b) On a $\forall x \in [0, 1[,\ \dfrac{G(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ par produit de Cauchy de $\sum a_n x^n$ et $\sum x^n$ sur $[0, 1[$.

Donc $\forall x \in [0, 1[,\ \dfrac{G(x) - G(1)}{x - 1} = \dfrac{G(x) - 1}{x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$.

c) On a $\forall x \in [0, 1[,\ \sum_{k=0}^{n} R_k x^k \leq S(x)$. En faisant tendre x vers 1^-, on obtient $\sum_{k=0}^{n} R_k \leq G'(1)$.

On en déduit que $\sum R_n$ à termes positifs converge, c'est-à-dire X d'espérance finie, donc a) d'applique.

Remarque : On a ainsi prouvé la propriété admise en cours de probas :

X est d'espérance finie ssi G dérivable en 1, et on a alors $G'(1) = E(X)$.

8) a) On a $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} |a_m| \binom{m}{n} |a_m| |z_0|^{m-n} |h|^m \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| (|z_0| + |h|)^m$.

Or, la série $\sum |a_m| \rho^m$ admet aussi R comme rayon de convergence.

Comme $|z_0| + |h| < R$, alors $\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| (|z_0| + |h|)^m < +\infty$.

b) Soit $0 < |h| < R - |z_0|$.

Comme $|z_0 + h| < R$, on a $f(z_0 + h) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z_0 + h)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} a_m z_0^{m-n} h^n$

On considère la famille sommable $\left(\binom{m}{n} \dfrac{1}{\rho^m} z_0^{m-n} h^m \right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$, où par convention $\binom{m}{n} = 0$ si $n > m$.

Par Fubini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m}{n} a_m z_0^{m-n} h^n$ cv abs, donc il existe $c_n = \sum_{m=n}^{+\infty} \binom{m}{n} a_m z_0^{m-n}$ et on a :

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{m=n}^{+\infty} \binom{m}{n} a_m z_0^{m-n} \right) h^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n h^n$$

Donc f est développable en série entière en z_0 de rayon $R' \geq R - |z_0|$.