Interrogation n°14. *Barème sur 24 pts*

1) Soit $\boxed{\sum a_n z^n \text{ de rayon de convergence } R}$. *Les questions a) et b) sont indépendantes.*

a) [1 pt] On note R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n}$. Exprimer R' en fonction de R.

b) [1.5 pt] On note $\begin{cases} R_0 \text{ le rayon de convergence de } \sum a_{2n} z^{2n} \\ R_1 \text{ le rayon de convergence de } \sum a_{2n+1} z^{2n+1} \end{cases}$

On pose $\Delta_0 = \{\rho \geq 0 \mid (a_{2n}\rho^{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \}$ et $\Delta_1 = \{\rho \geq 0 \mid (a_{2n+1}\rho^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \}$.

Exprimer R en fonction de R_0 et R_1.

c) [1 pt] Soient $\begin{cases} r_0 \text{ le rayon de convergence de } \sum a_{2n} z^{n} \\ r_1 \text{ le rayon de convergence de } \sum a_{2n+1} z^{n} \end{cases}$

Exprimer *sans justification* R en fonction de r_0 et r_1.

2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$.

a) [1.5 pt] Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum H_n x^n$.

b) [1.5 pt] Pour tout réel $x \in]-R, R[$, exprimer $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ en utilisant $\ln(1-x)$.

3) *Les questions sont indépendantes. Aucune justification n'est demandée.*

a) [1 pt] Pour $0 \leq q < 1$, calculer $M = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-q)q^{n-1}$.

b) [1.5 pt] Pour $|x| < 1$, calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

c) [1 pt] Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\ln 2)^{2n}}{(2n)!}$.

d) [1 pt] Pour x réel vérifiant $|x| < 1$, exprimer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) x^n$ par une fraction rationnelle

4) a) [2 pts] On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$. Montrer que $S = \int_0^1 \arctan(x)\, dx$.

b) [1 pt] En déduire que $S = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\boxed{a_n = \binom{2n}{n}}$. On vérifie (*admis ici*) que $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$.

a) [1 pt] Déterminer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$.

b) [2 pts] Expliciter une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$ sur $]-R, R[$.

c) *Question hors-interrogation.* En déduire $f(x)$.

6) *Les questions a) et b) sont indépendantes*

Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $\boxed{R > 0}$.

a) [1 pt] On suppose que f est paire, c'est-à-dire $f(x) = f(-x)$. Montrer que $a_n = 0$ pour tout n impair.

b) [1.5 pt] On suppose que $f\left(\frac{1}{k}\right) = 0$ pour tout entier k assez grand.

En raisonnant par l'absurde et en utilisant un DL, montrer que f est nulle, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$.

7) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une loi sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0}$ et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1}$.

On pose $\forall x \in [0,1],\ G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Ainsi, G est la série génératrice de la loi.

On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = 1 - A_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

a) [1 pt] On suppose $E(X) < +\infty$. Montrer que G est dérivable en 1 et que $G'(1) = E(X)$.

b) [1 pt] On pose $\forall x \in [0,1[,\ S(x) = \dfrac{G(x) - G(1)}{x - 1}$. Montrer que $\forall x \in [0,1[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$.

c) [1 pt] (★) On suppose que $G'(1)$ existe.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} R_k \leq G'(1)$. Conclure.

8) Soit $f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$ une série entière de rayon $R > 0$.

Rappel : Théorème de Fubini :pour les familles sommables. Soit une famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,m}|$ converge pour tout $m \in \mathbb{N}$, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |u_{n,m}|\right)$ converge.

Ainsi, la famille $(u_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable.

Alors $\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}$ converge absolument pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ converge absolument, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

a) [1 pt] Soient z_0 et $h \in \mathbb{C}$ tels que $|z_0| < R$ et $|h| < R - |z_0|$.

Montrer que $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} |a_m| |z_0|^{m-n} |h|^n\right) < +\infty$.

On en déduit que la famille $(\binom{m}{n} a_m z_0^{m-n} h^m)_{0\leq n\leq m}$ est sommable.

b) [1 pt] Montrer que $h \longmapsto f(z_0 + h)$ est DSE en $h = 0$ de rayon $\geq R - |z_0|$.