Interrogation n°13. Corrigé

1) a) On a $E(Z_\lambda) = G'_\lambda(1) = \lambda$ et $V(Z_\lambda) = G''_\lambda(1) + G'_\lambda(1) - G'_\lambda(1)^2 = \lambda$.

Donc $E(X_\lambda) = 1$ et $V(X_\lambda) = \dfrac{\lambda}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda}$.

b) Par Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P(|X_\lambda - 1| \geq \frac{1}{\lambda^{1/3}}) = P((X_\lambda - 1)^2 \geq \frac{1}{\lambda^{2/3}}) \leq \lambda^{2/3} V(X_\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1/3}} \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to +\infty.$$

c) On a $|f(X_\lambda) - f(1)| \leq k\,|X_\lambda - 1|$, donc $|E(f(X_\lambda)) - f(1)| \leq kE(|X_\lambda - 1|)$.

Pour conclure, il suffit de prouver $E(|X_\lambda - 1|) \to 0$ lorsque $\lambda \to +\infty$.
Par Cauchy-Schwarz, $E(|X_\lambda - 1|) \leq E(|X_\lambda - 1|^2)^{1/2} = V(X_\lambda)^{1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \to 0$ lorsque $\lambda \to +\infty$.

d) $(Y = 0) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_n = 0)$. Donc $P(Y = 0) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \dfrac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \dfrac{1}{e - 1} < 1$.

2) Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

a) Soit $a > 1$. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in [a, +\infty[} \dfrac{\ln n}{n^x} = \dfrac{\ln n}{n^a} = O\left(\dfrac{1}{n^b}\right)$, où $b = \dfrac{1+a}{2} > 1$.

On en déduit que pour tout $a > 1$, $\sum \dfrac{\ln n}{n^x}$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$.
Ainsi, $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} (f_n)'$ convergent simplement sur $]1, +\infty[$, et $\sum (f_n)'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, où $a > 1$
Donc S est de classe C^1, et $\forall x > 1$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \ln n}{n^x}$.

b) Soit $a > 0$. La série $\sum (-1)^{n-1} f_n(x)$ converge pour tout $x > 0$ par le CSSA.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k f_k(x)\right| \leq f_n(x)$.
La série $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, car $\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^a} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
On en déduit que T est continue sur $]0, +\infty[$.

De plus, la convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$ voisinage de $+\infty$.
Donc par le théorème de la double limite, $\lim_{x \to +\infty} T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1$.

c) Soit $a > 0$. On pose $n_0 = \left\lceil \exp(\frac{1}{a}) \right\rceil$.
Pour tout $x \geq a$, on a $\exp(\frac{1}{x}) \leq n_0$, donc la série $\sum_{n \geq n_0} (-1)^{n-1} g_n(x)$ vérifie le CSSA.
Donc la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, car $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty[} |g_n(x)| = g_n(a) \to 0$.

On en déduit que $\sum_{n \geq n_0} (-1)^{n-1} f'_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$.
On en déduit que T est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3) a) On a $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = g(1)$.

b) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément, alors f est continue, donc $g(1) = 0$.

c) On a bien $f(x) = 0$. On a $\sup |f_n - f| = \sup |f_n| = f_n(x_n) \sim \left(\dfrac{1}{1 + 1/n}\right)^n \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{en} \to 0$.

d) On a $|f_n(x)| = x^n\,|g(x)| = x^n\,|g(x) - g(1)| \leq x^n(1 - x)M$ par l'IAF.
On déduit de c) que $\sup |f_n| \leq \left(\dfrac{1}{1 + 1/n}\right)^n \dfrac{1}{n+1} M$, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

4) a) On a $0 \leq \exp(tX) \leq e^{t\rho}$, donc $\exp(tX)$ est une v.a. d'espérance finie.
Par le théorème du transfert, on a $L(t) = E(\exp(tX)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(tx_n)$, où $a_n = P(X = x_n)$.

Posons $f_n(t) = a_n \exp(tx_n)$. On a $\forall p \in \mathbb{N}$, $f_n^{(p)}(t) = a_n (x_n)^p \exp(tx_n)$.

Soit $\alpha > 0$. On a $\sup_{t\in[-\alpha,\alpha]} \left| f_n^{(p)}(t) \right| \leq a_n \rho^p \exp(\alpha\rho)$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \rho^p \exp(\alpha\rho)$ converge.
Donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment $[-\alpha, \alpha]$.

On en déduit que L est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $L^{(p)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_n)^p \exp(tx_n)$.

En particulier, $L^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_n)^p = E(X^p)$ par le théorème du transfert.

b) On a $\varphi'(t) = \dfrac{L'(t)}{L(t)}$. On a $L(0) = 1$ et $L'(0) = E(X) = 0$. Donc $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

On a $\varphi''(t) = \dfrac{L''(t)L(t) - L'(t)^2}{L(t)^2} \leq \dfrac{L''(t)}{L(t)} \leq \dfrac{\rho^2 E(\exp(tX))}{E(\exp(tX))} = \rho^2$.

En intégrant deux fois sur $[0, t]$, on obtient $\forall t \geq 0$, $\varphi(t) \leq \dfrac{1}{2}\rho^2 t^2$. Donc $L(t) \leq \exp\left(\dfrac{1}{2}\rho^2 t^2\right)$.

5) a) $P(Y_{n+1} = (0,0) \mid Y_n = (1,0)) = P(Y_{n+1} = (0,0) \mid Y_n = (1,1)) = 0$.
Et $P(Y_{n+1} = (0,0) \mid Y_n = (0,0)) = P(Y_{n+1} = (0,0) \mid Y_n = (0,1)) = P(X_{n+2} = 0) = \frac{1}{2}$.
Donc $P(Y_{n+1} = (0,0)) = \frac{1}{2} P(Y_n = (1,0)) + \frac{1}{2} P(Y_n = (1,0))$.

De même pour les autres. On en déduit $A = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $P(N = 0 \mid X_0 = 0) = 0$ et $P(N = 0 \mid X_0 = 1) = P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\alpha_0 = 1 - 0 = 1$ et $\beta_0 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

c) On a $(N > n) = (Y_0 \neq \Delta, ..., Y_n \neq \Delta)$.

d) Lorsque $X_0 = 0$ et $X_1 = 0$, on a nécessairement $Y_0 \neq \Delta$.

Donc $P(N > n \mid X_0 = 0, X_1 = 0) = P(Y_1 \neq \Delta, ..., Y_n \neq \Delta \mid X_0 = 0, X_1 = 0)$.

Mais $Y_1, ..., Y_n$ sont indépendants de X_0.

Donc on obtient $P(Y_1 \neq \Delta, ..., Y_n \neq \Delta \mid X_1 = 0)$, qui vaut α_{n-1} (cf propriété admise).

e) Par la formule des probas totales, on a :
$\alpha_n = P(N > n \mid X_0 = 0, X_1 = 0) P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) + P(N > n \mid X_0 = 0, X_1 = 1) P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$.

On a $P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$ par indépendance. De même pour $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0)$.

On a par c), $P(N > n \mid X_0 = 0, X_1 = 0) = \alpha_{n-1}$.

De même, $P(N > n \mid X_0 = 0, X_1 = 0) = P(Y_1 \neq \Delta, ..., Y_n \neq \Delta \mid X_1 = 1) = \beta_{n-1}$.

Donc $\alpha_n = \dfrac{1}{2}\alpha_{n-1} + \dfrac{1}{2}\beta_{n-1}$.

f) On a $\beta_n = \frac{1}{2} P(N > n \mid X_0 = 1, X_1 = 0) + \frac{1}{2} P(N > n \mid X_0 = 1, X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}\alpha_{n-1} + 0 = \dfrac{1}{2}\alpha_{n-1}$.

g) On obtient donc $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$, où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} A^n\right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = (I_2 - A)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 5$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 3$, d'où on déduit $E(N) = \frac{1}{2}(5 + 3) = 4$.

Remarque : On pourrait conclure plus aisément en utilisant **les espérances conditionnelles** :

Avec $\alpha = E(N \mid X_0 = 0)$ et $\beta = E(N \mid X_0 = 1)$, on a en effet $\begin{cases} \alpha = 1 + (\alpha + \beta)/2 \\ \beta = 1/2(1 + \alpha) \end{cases}$