Interrogation n°13. *Barème sur 24 pts*

1) Pour $\lambda > 0$, soit $\boxed{Z_\lambda \text{ une v.a.r. de loi de Poisson de paramètre } \lambda > 0}$. On pose $\boxed{X_\lambda = \dfrac{Z_\lambda}{\lambda}}$.

On rappelle que la série génératrice de la variable entière Z_λ est $G_\lambda(t) = \exp(\lambda(t-1))$.

Les questions b), c) et d) sont indépendantes.

a) [1 pt] Donner sans justification $E(X_\lambda)$ et $V(X_\lambda)$.

b) [1 pt] Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} P\left(|X_\lambda - 1| \geq \dfrac{1}{\lambda^{1/3}}\right) = 0$.

c) [1.5 pt] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction lispchitzienne de rapport k. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(f(X_\lambda)) = f(1)$$

Indication : Faire intervenir $E(|X_\lambda - 1|)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

d) [1.5 pt] On pose $Y = \min(Z_1, Z_2, Z_3, ...) = \min_{n \in \mathbb{N}^*}(Z_n)$. Montrer que $P(Y = 0) \leq \dfrac{1}{e-1}$.

2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. On a $\forall x > 0$, $g_n(x) = f_n'(x) = -\dfrac{\ln n}{n^x}$.

On considère les fonctions S et T définies par

$$\forall x > 1, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \ T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

a) [2.5 pts] Montrer avec soin que S est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

b) [2 pts] Montrer que T est continue sur $]0, +\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

c) [2.5 pts] Soit $x > 0$. On admet que l'application $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est décroissante sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$.

Montrer avec soin que T est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3) Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $\boxed{f_n(x) = x^n g(x)}$.

a) [0.5 pt] Expliciter sans justification la limite simple $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) [1 pt] En déduire que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$, alors nécessairement $g(1) = 0$.

c) [1 pt] On considère ici le cas particulier $g(x) = 1 - x$. On a donc $f_n(x) = x^n(1 - x)$.

On admet que $\sup |f_n|$ est atteint en $x_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1 + 1/n}$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

d) [1.5 pt] On revient au cas général. On suppose $g(1) = 0$.

En utilisant c), montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Indication : On pourra poser $M = \sup_{[0,1]} |g'|$.

4) Soit X une variable réelle bornée à valeurs dans $[-\rho, \rho]$, où $\rho \geq 0$.

Remarque : On prend donc $\operatorname{Im} X \subset E = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\} \subset [-\rho, \rho]$.

a) [3 pts] On considère $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\boxed{L(t) = E(\exp(tX))}$.

Montrer que L est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que $\forall p \in \mathbb{N}$, $L^{(p)}(0) = E(X^p)$.

b) *Question supplémentaire hors-interrogation.*

On suppose de plus $E(X) = 0$. Montrer que $\forall t \geq 0$, $L(t) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\rho^2 t^2\right)$.

Indication : En posant $\varphi(t) = \ln(L(t))$, calculer $\varphi''(t)$.

5) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = (X_n, X_{n+1})$. On peut noter que $P(Y_0 = (1,1) \mid X_0 = 0) = 0$.

On considère $N = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid Y_n = (1,1)\}$.

On peut noter (admis ici) que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\inf\{n \geq p \mid Y_n = (1,1)\}$ a même loi que $N + p$.

a) [1 pt] *Cette question est indépendante des suivantes.*

On considère le vecteur $W_n = \begin{pmatrix} P(Y_n = (0,0)) \\ P(Y_n = (0,1)) \\ P(Y_n = (1,0)) \\ P(Y_n = (1,1)) \end{pmatrix}$.

Donner sans justification une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $W_{n+1} = AW_n$.

Remarque : En fait, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

b) [1 pt] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\alpha_n = P(N > n \mid X_0 = 0) \quad \text{et} \quad \beta_n = P(N > n \mid X_0 = 1)$$

Calculer α_0 et β_0.

c) [0 pt] Exprimer l'événement $(N > n)$ en fonction des Y_k. On pourra poser $\Delta = (1,1)$.

d) [1.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $P(N > n \mid X_0 = 0, X_1 = 0) = P(N > n \mid X_1 = 0) = \alpha_{n-1}$.

e) [1.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})$.

f) *Question supplémentaire hors-interrogation.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\beta_n = \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$.

g) *Question supplémentaire hors-interrogation.* Déterminer $E(N)$.