Interrogation n°12. Corrigé

1) XY est de la forme $f(X,Y)$. Donc XY et Z sont indépendantes, et ainsi $\mathrm{Cov}(XY,Z)=0$.

On a $\mathrm{Cov}(XY,XZ)=E(X^2YZ)-E(XY)E(YZ)=E(X^2)E(Y)E(Z)-E(X)^2E(Y)E(Z)=E(X^2)E(X)^2-E(X)^4$.

2) a) Le tirage consiste à choisir une partie de cardinal n parmi $2n$.

Il y a donc $\binom{2n}{n}$ configurations possibles et $\binom{2n-2}{n-2}$ parmi elles contiennent la paire numéro 1.

La probabilité est donc $p=\dfrac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}}=\dfrac{n(n-1)}{2n(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

b) On écrit $N=\sum_{i=1}^{n}1_{A_i}$, où A_i est l'événement : La i-ième paire au complet a été tirée.

Avec les notations du a), on a $P(A_i)=p$ (indépendant de i).

Par linéarité de l'espérance, $E(N)=np=\dfrac{n(n-1)}{2(2n-1)}$.

Remarque : Les événements A_i ne sont pas indépendants !

3) a) On a $\forall x\in\mathbb{N}$, $(X=x)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(S_n=x,\ N=n)$ est un événement comme réunion dénombrable d'événements.

Remarque : Valable même si les Z_i sont à valeurs réelles : dans tous les cas, $\mathrm{Im}\,X\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Im}\,S_n$, donc X prend un nombre au plus dénombrable de valeurs.

b) $\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\dfrac{q^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\times\dfrac{p^k\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Avec $m=n-k$, on a donc $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\dfrac{p^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{+\infty}\dfrac{q^m\lambda^m}{m!}=\dfrac{p^k}{k!}e^{-\lambda}e^{q\lambda}=\dfrac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}$.

c) On a $X\leq N$, donc $P(X=k\mid N=n)=0$ si $n<k$.

Par la formule des probas totales, on a donc : $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k\mid N=n)P(N=n)$.

On a $P(X=k\mid N=n)=P(Z_1+...+Z_n=k\mid X=n)$.

Comme N est indépendante des Z_i, on a : $P(X=k\mid N=n)=P(Z_1+...+Z_n=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.

En effet, $Z_1+...+Z_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Donc $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\dfrac{(p\lambda)^k}{n!}e^{-p\lambda}$ par a). Ainsi, X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

d) On a $Y=\sum_{i=1}^{N}\overline{Z_i}$, où $\overline{Z_i}=1-Z_i$. Les $\overline{Z_i}$ sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}(q)$.

Les $\overline{Z_i}$ sont aussi indépendantes de N. Donc par b), Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda q)$.

e) On a $P(X=n,Y=m)=P(X=n,N=n+m)=\binom{n+m}{n}p^nq^m\dfrac{\lambda^{n+m}}{(n+m)!}e^{-\lambda}=\dfrac{(p\lambda)^n}{n!}e^{-p\lambda}\dfrac{(q\lambda)^m}{m!}e^{-q\lambda}$.

On a donc bien $P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m)$.

Remarque : X et $Y=N-X$ sont indépendantes, mais X et N ne le sont pas !

Si on prend une autre loi pour N qu'une loi de Poisson, X et Y ne sont plus indépendantes.

4) On a $P(X>Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X>n\mid Y=n)P(Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X>n)P(Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nR_n$.

D'autre part, comme X et Y jouent un rôle symétrique, on a $P(X>Y)=P(Y>X)$.

Or,$P(X>Y)+P(Y>X)+P(X=Y)=1$, donc $P(X>Y)=\frac{1}{2}(1-P(X=Y))$.

Or, $P(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^2$ car X et Y sont indépendantes.

Donc $P(X>Y)=\frac{1}{2}(1-\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^2)$.

5) a) On a $E((X-\lambda)^2) = V(X-\lambda) + E(X-\lambda)^2 = V(X) + \delta^2$.

Variante : On écrit $X - \lambda = (X-\mu) + (\mu - \lambda)$, et on applique Pythagore (avec le produit scalaire $\langle Y, Z \rangle = E(YZ)$).

On a donc $E((X-\lambda)^2) = E((X-\mu)^2) + E((\lambda-\mu)^2) = V(X) + \delta^2$.

b) Par Markov, $P(|X_n - \lambda| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E(|X_n - 1|^2)}{\varepsilon^2} = \dfrac{V(X_n) + (\mu_n - \lambda)^2}{\varepsilon^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

6) a) Par continuité décroissante, $P(N < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(N > n) = 0$,

car $P(N > n) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\dfrac{k}{k+1}\right) = \dfrac{1}{n+1}$.

b) $E(S_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} \sim_{+\infty} \ln n$ par comparaison entre sommes et intégrales.

On a $V(S_n) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1}$, donc $V(S_n) = O_{+\infty}(\ln n)$.

c) Posons $T_n = \dfrac{S_n}{\ln n}$. On a $\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = 1$ et $V(T_n) = \dfrac{V(S_n)}{(\ln n)^2} \to 0$.

Il résulte de l'exercice précédent que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - 1| < \varepsilon) = 1$.

On prend $\varepsilon = \min(1-a, b-1) > 0$. Ainsi, $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \subset [a, b]$.

On a donc $P(a < T_n < b) \geq P(|T_n - 1| < \varepsilon)$.

Par pincement, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} P(a < T_n < b) = 1$.

7) a) $p = \frac{1}{2}(G_N(1) + G_N(-1)) = \sum_{n \text{ pair}} a_n t^n$ est la probabilité que N soit pair.

b) $G_M(t) = E(t^{2N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n} = G_N(t^2)$.

Remarque :

Ne pas confondre avec $G_N(t)^2$ série génératrice de la somme de 2 v.a. indépendantes de même loi que N.

8) a) On a $Z^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j X_i Y_i X_j Y_j$.

Les v.a. $Y_i Y_j$ sont d'espérances finies comme produits de deux v.a. de moment d'ordres 2 finis.

Pour $i \neq j$, comme les v.a. X_i, X_j et $Y_i Y_j$ sont indépendantes, alors $X_i Y_i X_j Y_j$ est d'espérance finie et

$$E(X_i Y_i X_j Y_j) = E(X_i) E(Y_i X_j Y_j) = 0.$$

Comme X_i et Y_i sont indépendants, alors $E((X_i Y_i)^2) = E(X_i)^2 E(Y_i)^2 = E(X^2) E(Y^2)$.

Donc Z^2 est d'espérance finie comme somme de v.a. d'espérance finie et $E(Z^2) = nE(X^2)E(Y^2)$.

b) On a $D_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} X_{i1} Y_i$, avec $Y_i \sim D_{n-1}$.

Les X_{i1} sont bien indépendants les uns des autres et des Y_i.

Remarque : en revanche, les Y_i ne sont pas indépendantes en général, sauf lorsque $n = 2$.

Par a), $E(D_n^2) = \sum_{i=1}^n E((X_{i1})^2) E(D_{n-1}^2)$, d'où $E(D_n^2) = nE(D_{n-1}^2)$. Comme $D_0 = 1$, alors $E(D_n^2) = n!$

9) a) $P(XY = x) = \frac{1}{2} P(X = x \mid Y = 1) + \frac{1}{2} P(X = -x \mid Y = -1) = \frac{1}{2} P(X = x) + \frac{1}{2} P(X = -x) = P(X = x)$.

Donc XY suit la même loi que x. Il en est de même pour XZ.

b) Lorsque XY vaut x, XZ vaut x ou $-x$. On fixe x et $y \in \{-1, 1\}$ et on pose $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $y = \varepsilon x$.

On a $P(XY = x, XZ = y) = P(XY = x, YZ = \varepsilon) = \frac{1}{2}P(X = x, Z = \varepsilon \mid Y = 1) + \frac{1}{2}P(X = -x, Z = -\varepsilon \mid Y = -1)$

Donc $P(XY = x, XZ = y) = \frac{1}{2}P(X = x, Z = \varepsilon) + \frac{1}{2}P(X = -x, Z = -\varepsilon) = \frac{1}{4}P(X = x) + \frac{1}{4}P(X = -x)$.

On obtient donc bien $P(XY = x, XZ = \varepsilon x) = \frac{1}{2}P(X = x) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(XY = x)P(XZ = y)$.