Interrogation n$^{\text{o}}$12 bis

1) a) Soit A un événément indépendant de tout événément. Montrer que $P(A)$ vaut 0 ou 1.

b) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire indépendnate de toute v.a. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$.

Que peut-on dire de X ?

2) *Remarque* : Dans cet exercice, on utilise les propriétés sur les familles sommables.

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire réelle d'espérance finie.

a) Soit A un événement non négligeable, c'est-à-dire $P(A) > 0$.

L'espérance de X conditionnée à A est l'espérance de X pour la loi P_A.

Remarque : On rappelle que $P_A(C) = P(C \mid A)$.

Justifier l'existence de $E(X \mid A)$ et exprimer $E(X \mid A)$ à l'aide de $\sum_{x \in E} xP(X = x \mid A)$.

b) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet.

Justifier la formule des espérances conditionnelles :

$$\boxed{E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(X \mid B_n)P(B_n)}$$

c) *Exemple d'utilisation* : Formule de Wald

On suppose $X = \sum_{i=1}^{N} Z_i$, où Z_i sont des v.a. entières de même loi que Z.

On suppose aussi que N est une v.a. entière indépendante des Z_i.

(i) Montrer la formule de Wald : $\forall t \in [0, 1]$, $G_X(t) = G_N(G_Z(t))$.

(ii) En supposant de plus N et Z d'espérances finies, montrer que $E(X) = E(N)E(Z)$.

(iii) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que les Z_i suivent une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 \le p \le 1$. Montrer que X suit la loi de Poisson de paramètre λp.

d) *Exemple d'utilisation*

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$.

On note $N = \sup\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_1 = X_2 = ... = X_n\}$ la longueur de la première série de chiffres 0 ou 1.

On note $M = \sup\{m \in \mathbb{N}^* \mid X_{N+1} = X_{N+2} = ... = X_{N+m}\}$ la longueur de la seconde série de chiffres 0 ou 1.

Remarque : Comme $0 < p < 1$, N et M sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ presque sûrement.

On note A l'événement $(X_1 = 1)$.

(i) Calculer $E(N \mid A)$ et $E(M \mid A)$.

(ii) Calculer $E(N \mid \overline{A})$ et $E(M \mid \overline{A})$.

(iii) En déduire $E(N) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}$ et $E(M) = 2$.

Corrigé

1) a) On a A indépendant de lui-même, donc $P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2$, donc $P(A) \in \{0, 1\}$.

b) Par a), on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) \in \{0, 1\}$.

Donc X est constante presque partout : par additicité, il existe un (unique) x tel que $P(X = x) = 1$.

2) a) Par hypothèse, la famille $(xP(X = x))_{x\in E}$ est sommable.

Donc a fortiori, la sous-famille $(xP_A(X = x))_{x\in E}$ est sommable, car $P_A(X = x) \leq \dfrac{P(X = x)}{P(A)}$.

On a $E(X \mid A) = \sum_{x\in E} xP_A(X = x) = \sum_{x\in E} xP(X = x \mid A)$.

b) On a $E(X) = \sum_{x\in E} xP(X = x)$.

Pour tout $x \in E$, on a par la formule des probas totales : $P(X = x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} xP(X = x \mid B_n)P(B_n)$.

La famille $(xP(X = x \mid B_n)P(B_n))_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ est sommable, car

$$\sum_{x\in E}\sum_{n\in\mathbb{N}} |x|\, P(X = x \mid B_n)P(B_n) = \sum_{x\in E} |x|\, P(X = x) = E(|X|) < +\infty$$

Par Fubini, on en déduit que

$$\sum_{x\in E}\sum_{n\in\mathbb{N}} xP(X = x \mid B_n)P(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{x\in E} xP(X = x \mid B_n)P(B_n)$$

c'est-à-dire $E(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(X \mid B_n)P(B_n)$.

Remarque : De plus, X est d'espérance finie ssi les restrictions de X aux B_n sont d'espérances finies et si $\sum_{n=0}^{+\infty} E(|X| \mid B_n)P(B_n) < +\infty$.

c) (i) t^X est d'espérance finie, car $0 \leq t^X \leq 1$.

On a $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(t^X \mid N = n)P(N = n)$ par la formule des espérances conditionnelles.

Or, $E(t^X \mid N = n) = E(t^{Z_1} ... t^{Z_n} \mid N = n) = E(t^{Z_1} ... t^{Z_n})$, car N indépendante de $Z_1, ..., Z_n$.

On en déduit que $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} G_Z(t)^n P(N = n) = G_N(G_Z(t))$.

c) (ii) Par hypothèse et par le cours, G_X et G_N sont dérivables en $t = 1$. Donc la composée G_X est aussi dérivable en 1, et ainsi, X est d'espérance finie et $E(X) = G'_X(1) = G'_N(G_Z(1))G'_Z(1) = E(N)E(Z)$.

En effet, $G'_N(1) = E(N)$, $G_Z(1) = 1$ et $G'_Z(1) = E(Z)$.

c) (iii) $\forall t \in [0, 1]$, $G_X(t) = G_N(G_Z(t)) = e^{-\lambda}e^{\lambda(q+pt)} = e^{-\lambda p}e^{\lambda pt}$.

Comme la valeur de G_X sur $[0, 1]$ détermine entièrement la loi, alors X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

d) (i) Sachant A, N suit la loi géométrique (de premier succès) $\mathcal{G}(q)$ et M suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Donc $E(N \mid A) = \dfrac{1}{q}$ et $E(M \mid A) = \dfrac{1}{p}$.

(ii) Sachant A, N suit la loi géométrique (de premier succès) $\mathcal{G}(p)$ et M suit la loi géométrique $\mathcal{G}(q)$.

Donc $E(N \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{p}$ et $E(M \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{q}$.

(iii) On a $E(N) = E(N \mid A)P(A) + E(N \mid \overline{A})P(\overline{A}) = p\dfrac{1}{q} + q\dfrac{1}{p} = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}$.

De même, $E(M) = E(M \mid A)P(A) + E(M \mid \overline{A})P(\overline{A}) = p\dfrac{1}{p} + q\dfrac{1}{q} = 2$.