Interrogation n^{o}11. Corrigé

1) a) Par le th spectral, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ avec $u(e_j) = \lambda_j e_j$.

On a alors $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$, en notant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Donc $\langle u(x), x\rangle \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1 \|x\|^2$

b) On a $\dim G = n - p + 1$. Comme $\dim F \geq p$, on a : $\dim G_p + \dim F > n$.

Donc G et F ne sont pas en somme directe. Donc $F \cap G_p$ contient un vecteur non nul x.

c) On reprend les notations du b). On a $x \in G$.

Donc $\langle u(x), x\rangle \geq \lambda_p \|x\|^2$: on applique a) à la restriction de u à G. Donc $\sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_p$.

d) Il y a égalité au c) avec $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$.

Remarque : Donc λ_p est un minorant qui est atteint, c'est-à-dire le minimum.

2) a) $\langle e_j, u(e_j)\rangle$ est le coefficient a_{jj}, car $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ et $\mathcal{B}$ BON. Donc $\tau = \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, u$.

b) On a $\sum_{j=1}^n \|u(e_j)\|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = \mathrm{tr}(A^T A)$.

(*Variante* : $\sum_{j=1}^n \|u(e_j)\|^2 = \sum_{j=1}^n (A_j \mid A_j) = \mathrm{tr}(A^T A)$, par définition de la matrice de Gram $A^T A$).

Soit A' la matrice de u dans une autre BON $\mathcal{B}'$.

Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ (matrice de passage entre deux BON) telle que $A' = U^{-1} A' U = U^T A' U$.

On a donc $\mathrm{tr}(A^T A) = \mathrm{tr}(U^T (A')^T U U^T A' U) = \mathrm{tr}(U^T (A')^T A' U) = \mathrm{tr}((A')^T A' U U^T) = \mathrm{tr}((A')^T A')$.

c) En considérant $\mathcal{B}$ BON adaptée à $F \oplus F^\perp$, on a $A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, donc $f(\mathcal{B}) = \mathrm{tr}(A^T A) = r$.

3) Notons λ et μ les valeurs propres réelles de la matrice symétrique réelle A (donc diagonalisable).

Alors $A \in S_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ \mu > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\mu > 0 \\ \lambda + \mu > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac - b^2 > 0 \\ a + c > 0 \end{cases}$

Autre peuve : Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,, on a $X^T A X = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

On veut donc $q(X) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \geq 0$, avec égalité ssi $(x, y) = (0, 0)$.

Lorsque $y \neq 0$, on a $q(X) = y^2\ (ar^2 + 2br + c)$, où $r = x/y$.

On pose $\Delta = 4(b^2 - ac)$ le discriminant du polynôme $P(r) = ar^2 + 2br + c$.

On en déduit que $\forall X \neq 0$, $q(X) > 0$ ssi ($a > 0$ et $\Delta < 0$), donc ssi ($ac - b^2 > 0$ et $a > 0$).

Lorsque $ac > b^2$ est vérifié, alors a et c sont nécessairement de même signe, donc $a + c > 0$ ssi $a > 0$.

4) a) On a $\varphi(X, u(Y)) = (X \mid A(MY)) = (X \mid BY)$.

Comme B est symétrique, on a donc $(X \mid BY) = (BX \mid Y)$, c'est-à-dire $\varphi(X, u(Y)) = \varphi(u(X), Y)$.

b) Comme u est symétrique, u est diagonalisable, donc M aussi.

Remarque : M est diagonalisable dans une BON de $\mathbb{R}^n$ pour φ (mais pas en général pour le psc).

Remarque : On pourrait aussi prouver que $M = A^{-1}B$ est diagonalisable en utilisant le fait que A^{-1} une matrice de Gram de la forme $P^T P$, et donc $M = P^T P B$ est semblable à la matrice symétrique $P B P^T$, car P est inversible.

c) $\sup_{X\neq 0} \dfrac{X^TBX}{X^TAX} = \sup_{X\neq 0} \dfrac{\varphi(X,u(X))}{\varphi(X,X)} = \max \mathrm{Sp}(u) = \max \mathrm{Sp}(M)$.

5) a) αI_n n'est semblable (dont orthosemblable) qu'à elle même.

b) Supposons B orthosemblable à A. Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = U^{-1}AU$.

Comme $B = U^TAU$, alors B est symétrique.

Comme $B = U^{-1}AU$, alors A et B ont même polynôme caractéristique.

Réciproquement, supposons B symétrique et aynt même polynôme caractéristique que A.

Notons $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les racines (répétées avec multiplicité) de ce polynôme.

Alors par le th spectral, A et B sont tous les deux orthosemblables à $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Donc A et B sont orthosemblables (car si U et $V \in O_n(\mathbb{R})$ matrices de passage, alors $UV \in O_n(\mathbb{R})$.

c) La matrice R est orthogonale, donc $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ sont orthosemblables.

D'autre part, toutes les matrices de rotation sont de la forme $M(\varphi)$.

Et on a (par commutativité) : $M(\varphi)^{-1}M(\theta)M(\varphi) = M(\theta)$.

En prenant $\theta \neq 0$ $[\pi]$, on a $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ distinctes, orthosemblables et non directement orthosemblables.

d) On a $S = U^{-1}DU$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$, il faut que U soit une BON de vecteurs propres de S.

Si $U \in O_n^-(\mathbb{R})$, on considère V obtenue en changeant le signe de la dernière colonne de U.

On a alors $S = V^{-1}DV$ et $V \in O_n^+(\mathbb{R})$.

6) Posons $Y = Z - X$.

On a $P(Y = k \mid Z = n) = P(X = n - k \mid Z = n) = \dfrac{1}{n+1}$ si $0 \leq k \leq n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y = k \mid Z = n) = P(X = k \mid Z = n)$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

Autrement dit, X et Y ont les mêmes lois conditionnelles relativement aux événements $Z = n$.

Or, $P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k \mid Z = n)P(Z = n)$ et de même pour $P(Y = k)$.

Autrement dit, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1} P(Z = n)$.

7) a) On a $P(B_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{P(B_{n+1} \cap A_n)}{P(A_n)} = \dfrac{P(A_{n+1})}{P(A_n)}$.

b) On a $P(A_n) = \sum_{k=1}^{N} P(A_n \mid M = k)P(M = k) = \sum_{k=1}^{N} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

c) Par les sommes de Riemann, $\lim_{N\to+\infty} P(A_n) = \int_0^1 x^n\, dx = \dfrac{1}{n+1}$.

Or, $P(B_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{P(A_{n+1})}{P(A_n)}$, car $A_{n+1} = A_n \cap B_{n+1}$. Donc $\lim_{N\to+\infty} P(A_n) = \dfrac{n+1}{n+2}$.

8) On pose $B_1 = A_1$ et $\forall k \geq 2$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. On a ainsi $\mathbb{N} = \sqcup_{k\geq 1} B_k$ (union disjointe).

Par la propriété de sommation par paquets, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n\in B_k} a_n\right)$.

Remarque : La propreté assure au passage que les séries $\sum_{n\in A_k} a_n$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n\in B_k} a_n\right)$ convergent.

Or, on a $\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{n\in B_k} a_n\right). = \sum_{n\in A_k} a_n$ car A_k est l'union disjointe (finie) de $B_1, ..., B_k$.