Interrogation n°11. *Barème sur 24.5 pts*

1) Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme symétrique.

On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u.

a) [1 pt] Montrer que $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle \geq \lambda_1 \|x\|^2$.

b) [0.5 pt] Soit F un sev de dimension $\geq p$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

On pose $G = \mathrm{Vect}(e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$. Montrer que $F \cap G$ contient un vecteur *non nul* x.

c) [2 pts] Soit F un sev de dimension $\geq p$. Montrer que $\sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_p$.

d) [1 pt] Donner sans justification un exemple de sev F pour lequel il y a égalité au c).

Remarque culturelle : On en déduit alors la formule dite du min-max :

$$\lambda_p = \inf_{F \text{ sev de dim } p} \left(\sup_{x\in F,\ x\neq 0} \frac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \right)$$

2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base **orthonormée** d'un espace euclidien E.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

a) [1 pt] Montrer que $\tau(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^n \langle e_j, u(e_j)\rangle$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

b) [3 pts] On pose $f(\mathcal{B}) = \sum_{j=1}^n \|u(e_j)\|^2$.

Exprimer $f(\mathcal{B})$ en utilisant la matrice $A^T A$.

En déduire que la valeur de $f(\mathcal{B})$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

c) [1 pt] Que vaut $f(\mathcal{B})$ lorsque u est une projection orthogonale sur un sev F de dimension r ?

3) [2 pts] Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle d'ordre 2.

Montrer que $A \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire définie positive) ssi $\begin{cases} ac - b^2 > 0 \\ a + c > 0 \end{cases}$

4) Soient A et $B \in S_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques réelles. On note $(X \mid Y) = X^T Y$.

On suppose de plus que $\forall X \neq 0$, $X^T A X > 0$.

Ainsi, $\varphi(X, Y) = X^T A Y = (X \mid AY)$ définit **un produit scalaire** sur $\mathbb{R}^n$.

a) [1 pt] On note u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = A^{-1}B$.

Montrer que u est **symétrique pour le produit scalaire** φ.

b) [1 pt] Montrer que M est diagonalisable.

c) [0.5 pt] (★) Donner sans justification la valeur de $\sup_{X\neq 0} \dfrac{X^T B X}{X^T A X}$.

5) (*extrait du concours Centrale PC 2013*) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que A et B sont orthosemblables si il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $B = U^{-1}AU$.

On dit que ces matrices sont directement orthosemblables si il existe $U \in O_n^+(\mathbb{R})$ telles que $B = U^{-1}AU$.

a) [0.5 pt] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quelles sont les matrices orthosemblables à αI_n ?

b) [2.5 pts] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice **symétrique** réelle.

Caractériser les matrices B orthosemblables à A.

Indication : On fera notamment intervenir les polynômes caractéristiques de A et B.

c) [1 pt] On considère $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

On vérifie aisément que $R^{-1}M(\theta)R = M(-\theta)$.

En déduire un exemple de deux matrices orthosemblables, mais non directement orthosemblables.

d) *Question hors-interrogation.* On considère $D = \mathrm{Diag}(1, 2, ..., n)$. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que si S est orthosemblable à D, alors S est directement orthosemblable à D.

6) [2 pts] Soient X et Z deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X par rapport à l'événement $(Z = n)$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Montrer que les variables aléatoires $Z - X$ et X suivent la même loi.

7) On choisit un entier M compris entre 1 et N, selon la loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$.

Puis on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables indépendantes de *même* loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{M}{N}\right)$.

On a ainsi $P(X_n = 1 \mid M = k) = \dfrac{k}{N}$. On note B_n l'événement : “ $X_n = 1$ ”.

On note A_n l'événement : “ $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, ..., $X_n = 1$ ”, c'est-à-dire $A_n = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$.

a) [1 pt] Exprimer $P(B_{n+1} \mid A_n)$ en fonction de $P(A_n)$ et de $P(A_{n+1})$.

b) [1 pt] Montrer que $P(A_n) = \dfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

c) [1 pt] En utilisant les sommes de Riemann, donner sans justification $\lim_{N\to+\infty} P(B_{n+1} \mid A_n)$.

Remarque : Attention, dans l'expression précédente, n est fixé et N tend vers $+\infty$.

8) [1.5 pt] On considère une série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ de réels positifs (ainsi, la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable).

On note A_n l'ensemble des entiers naturels $n \in \mathbb{N}^*$ dont les facteurs premiers sont tous $\leq n$.

Par exemple, A_3 est l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ de la forme $2^i 3^j$, avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

En utilisant la sommation par paquets, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n\in A_k} a_n$.

Indication : S'inspirer de la preuve sur la continuité croissante en probabilités.