Interrogation n°10. Corrigé

1) Pour tout $x \in F$, $\langle a, x\rangle = \langle b, x\rangle$, et par Cauchy-Schwarz, $\langle b, x\rangle \leq \|b\| \, \|x\|$, avec égalité notamment pour $x = b$.

On en déduit que $M = \|b\|$.

2) a) On a $\forall ij \in [\![1, p]\!]$, $\langle x - y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle \ \ \delta_{ij} = 0$.
Donc $x - y$ est orthogonal à tous les e_j, donc par linéarité à tout vecteur de F.

b) On a $x = (x - y) + y \in F^{\perp} \oplus F$, donc par Pythagore, $\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x\|^2$.
Donc $\|x\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2$, avec égalité ssi $x - y$, c'est-à-dire ssi $x \in F$.

3) a) $A^T A = \left(\begin{array}{c|c} U^T & O_{p,n-p} \\ \hline W^T & V^T \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U & W \\ \hline O_n & V \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} U^T U & U^T W \\ \hline W^T U & W^T W + V^T V \end{array}\right)$.
Supposons A orthogonale : $A^T A = I_{2n}$. Alors $U^T U = I_p$, donc U orthogonale, donc inversible.
Comme $U^T W = O$, alors W est nulle, donc $V^T V = I_{n-p}$.

Réciproquement, si U et $V \in O_n(\mathbb{R})$ et W nulle, alors $A^T A = I_n$.

Variante : Les colonnes de A forment une BON, donc les colonnes de U forment une famille orthonormée, donc U orthogonale. Les colonnes de W sont orthogonales aux colonnes de U, donc W est nulle. Et on en déduit que V est orthogonale. Réciproque immédiate comme précédemment.

b) Il résulte de a) par récurrence sur n que A est diagonale et les coefficients diagonaux $\in \{-1, 1\}$.
En effet, on prend $p = 1$ et on applique l'hypothèse de récurrence à V orthogonale et triangulaire supérieure.

Remarque : Preuve directe : On montre par récurrence forte que $A_j = \pm E_j$.
A chaque étape, $A_j \in \mathrm{Vect}(E_1, ..., E_j)$ doit être orthogonal aux précédents, donc à $\mathrm{Vect}(E_1, ..., E_{j-1})$, donc $A_j \in \mathbb{R}E_j$, et comme $\|A_j\| = 1$, alors $A_j = \pm E_j$.

4) a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et de trace 1, donc diagonalisable de valeurs propres 0 et 1.
De plus A est symétrique, donc E_0 et E_1 sont supplémentaires orthogonaux.
Donc A est la projection orthogonale sur $E_1 = \mathrm{Im}\, A$, c'est-à-dire la droite $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Les vecteurs colonnes de B forment une BON de $\mathbb{R}^2$, et $\det B = 1$, donc B est une rotation.
$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, où $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

c) $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique de valeurs propres 1 et -1, car $\chi_C(x) = x^2 - 1$.
Donc E_1 et E_{-1} sont supplémentaires orthogonaux. et C est la symétrie orthogonale par rapport à E_1.
En résolvant $CX = X$, on obtient $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}e^{i\pi/8}$, car $s(e^{i0}) = e^{i\pi/4}$ (première colonne).

5) Par le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})^{\perp}$ ont même dimension.
Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont orthogonaux.
Soient $(x, y) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \times \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Ainsi, $u(x) = x$ et y est de la forme $u(z) - z$.
Donc $\langle x, y\rangle = \langle x, u(z) - z\rangle = \langle x, u(z)\rangle - \langle x, z\rangle = \langle u(x), u(z)\rangle - \langle x, z\rangle = 0$ car $u \in O(E)$.

6) a) Posons $m = \min_{X \in \mathbb{R}^n} \|AX - B\|$. On a $m = d(B, \mathrm{Im}\, A)$. Par le cours, $m = \|Y - B\|$.

Donc $\|AX_0 - B\| = m$ ssi $AX_0 = Y$.

b) Y est défini par $Y \in \operatorname{Im} A$ et $Y - B \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$, donc ssi $A^T(Y - B) = 0$.

Donc $AX_0 = Y$ ssi $A^T(AX_0 - B) = 0$, c'est-à-dire $A^TAX_0 = A^TB$.

c) On sait que $\operatorname{Ker}(A^TA) = \operatorname{Ker} A$, d'où on déduit $\operatorname{rg}(A^TA) = \operatorname{rg} A$ par le th du rang. Et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$.

Comme $\operatorname{Im}(A^TA) \subset \operatorname{Im}(A^T)$, on en déduit donc par dimension que $\operatorname{Im}(A^TA) \subset \operatorname{Im}(A^T)$.

Lorsque B décrit $\mathbb{R}^n$, A^TB décrit $\operatorname{Im}(A^T)$, donc X_0 existe et est unique ssi A^TA est inversible.

Donc ssi $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, donc ssi $\operatorname{rg} A = p$ (la famille des vecteurs colonnes est libre).

7) a) On a $A = PA'$, où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. En effet, pour tout j, $A_j = PA'_j$, où $A_j = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} a_j$ et $A_j = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} a_j$.

Comme $P \in O_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ orthonormées, alors $|\det P| = 1$, d'où $|\det A| = |\det A'|$.

b) Chaque $a_k - b_k$ est combinaison linéaire des a_j, avec $j < k$. Donc $\det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_n) = \det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)$.

En effet, par récurrence sur k, on a $\det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_n) = \det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_k, a_{k+1}, ..., a_n)$.

c) On considère la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, avec $e_j = \dfrac{b_j}{\|b_j\|}$.

$\det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)$ est la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\|b_1\|, ..., \|b_n\|)$, donc $\det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n) = \|b_1\| ... \|b_n\|$;

Par b), $V(a_1, ..., a_n) = \|b_1\| ... \|b_n\|$.

Comme b_k est un projeté orthogonal de a_k, alors $\|b_k\| \leq \|a_k\|$ par Pythagore.

8) On a $e_1 = e'_1$ et $e_2 = e'_2 - e'_1$, donc $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e'_1, e'_2 - e'_1\rangle = \langle e'_1, e'_2\rangle - \langle e'_1, e'_1\rangle = -1$.

Remarque : De façon générale, le produit scalaire faisant de $\mathcal{B}$ une base orthonormée est défini par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$, psc des coordonnées (x_i) et (y_i) de x et y dans $\mathcal{B}$.

9) a) On a $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (\cos\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\sin\theta)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $O_2^+(\mathbb{R}) = \operatorname{Vect}(E_{11} + E_{22}, E_{21} - E_{12})$. De même $O_2^-(\mathbb{R}) = \operatorname{Vect}(E_{11} - E_{22}, E_{12} + E_{21})$.

On en déduit que les E_{ij} appartiennent à $\operatorname{Vect}(O_2(\mathbb{R}))$.

Par exemple, $E_{11} = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}) + \frac{1}{2}(E_{11} - E_{22})$ et $E_{12} = \frac{1}{2}(E_{12} - E_{21}) + \frac{1}{2}(E_{12} + E_{21})$.

Donc $\operatorname{Vect}(O_2(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque culturelle : Plus généralement, on a $\operatorname{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie en effet que chaque matrice E_{ij} est combinaison linéaire de deux matrices orthogonales.

Par exemple, $E_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} - E_{ji} + J) + \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ji} - J)$, où $J = \sum_{k \notin \{i,j\}} E_{kk}$.

b) Par a) et par linéarité de $B \longmapsto \operatorname{tr}(AB)$, on a donc $\forall B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(AB) = 0$.

En particulier, $\operatorname{tr}(AA^T) = 0$, donc $A = 0$.

Variante : Pour le psc $(A \mid B) = \operatorname{tr}(AB^T)$, on a donc A orthogonal à toute matrice, donc $A = O_2$.