Interrogation n°10. *Barème sur 25 pts*

1) [2 pts] Soit F un sev non nul d'un espace euclidien E. Soit $a \in E$.

On pose $M = \sup_{x \in F,\ x \neq 0} \dfrac{\langle a, x\rangle}{\|x\|}$. Montrer que $M = \|b\|$, où b le projeté orthogonal de a sur F.

2) [2.5 pts] Soit $x \in E$ espace préhilbertien et $(e_1, ..., e_p)$ une famille orthonormée de E.

a) On pose $y = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle\, e_i$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$. Justifier que $x - y \in F^{\perp}$.

Remarque : Cette propriété du cours est ici à redémontrer (brièvement).

b) Montrer l'inégalité de Bessel : $\sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$, en précisant les cas d'égalité.

3) a) [2 pts] Soit $A = \left(\begin{array}{c|c} U & W \\ \hline O_{n-p,p} & V \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $U \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

Donner une CNS sur U, V, W pour que $A \in O_n(\mathbb{R})$.

b) [1 pt] En déduire sans justification les matrices orthogonales $A \in O_n(\mathbb{R})$ qui sont triangulaires supérieures.

4) [3.5 pts] Dans chaque cas suivant, déterminer (de préférence sans calculs) la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice (projections orthogonales, symétries orthogonales, rotations, ... , en précisant à chaque fois le paramètre caractétistique : sev sur lequel se fait la projection, angle pour une rotation, etc ...).

On rappelle par ailleurs que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et que les sev propres sont orthogonaux.

a) $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque : On pourra encore noter A l'endomorphisme canoniquement à A.

5) [2.5 pts] Soit $u \in O(E)$ un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})^{\perp}$.

6) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $(\ \mid\ )$.

a) [1 pt] On note Y le projeté orthogonal de B sur $\mathrm{Im}\, A$. Donner une CNS sur X_0 pour que

$$\|AX_0 - B\| = \inf_{X \in \mathbb{R}^n} \|AX - B\|$$

b) [1.5 pt] Montrer que X_0 vérifie a) ssi $A^T A X_0 = A^T B$.

c) [2 pts] En utilisant une propriété vue en cours, montrer que $\mathrm{Im}(A^T A) = \mathrm{Im}(A^T)$.

En déduire une CNS sur A pour que X_0 existe et soit unique (pour tout $B \in \mathbb{R}^n$).

7) Soit $(a_1, ..., a_n)$ une base (arbitraire) d'un espace euclidien E.

a) [1.5 pt] On définit $V(a_1, ..., a_n) = |\det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_n)|$, où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_n)|$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$, ce qui valide la définition.

b) [1 pt] On note $(b_1, ..., b_n)$ la base *orthogonale* obtenue par le procédé de Gram-Schmidt.

Autrement dit, b_k est le projeté orthogonal de a_k sur $\mathrm{Vect}(a_1, ..., a_{k-1})^{\perp}$.

Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_n) = \det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)$.

c) [1 pt] En déduire l'inégalité d'Hadamard : $|V(a_1, ..., a_n)| = \|b_1\| ... \|b_n\| \leq \|a_1\| ... \|a_n\|$.

8) [1 pt] On peut définir un produit scalaire en décidant qu'une base donnée $\mathcal{B}$ est orthonormée.

On considère ici la base canonique (e_1, e_2) du plan $\mathbb{R}^2$, et on pose $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2) = (e_1, e_1 + e_2)$.

On considère ici le produit scalaire de sorte que la base $\mathcal{B}$ soit orthonormée. Calculer $\langle e_1, e_2 \rangle$.

9) a) [1.5 pt] Montrer que $\mathrm{Vect}(O_2(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) [1 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall U \in O_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AU) = 0$. Que peut-on dire de A ?

Indication : Utiliser le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) *Question supplémentaire* : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.