Interrogation n^{o}9. Corrigé

1) Les racines complexes du polynôme caractéristique sont deux à deux conjuguées. En se plaçant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le déterminant est le produit des racines, donc est le produit des modules. Donc $\det A > 0$.

2) A est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux valent λ.

Donc λ est l'unique valeur propre de A, et ainsi A est diagonalisable ssi $E_\lambda = \mathbb{C}^n$

Autrement dit, l'unique solution est $A = \lambda I_n$, c'est-à-dire N matrice nulle.

3) Supposons (i). Alors A est une matrice de projection, donc semblable à $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, où $r = \operatorname{rg} A$.

Donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{tr} A$, et a fortiori, (ii) équivaut à (iii).

Enfin, supposons (ii) et (iii). Alors A admet $E_0 = \operatorname{Ker} A$ comme sev propre de dimension $(n-1)$ et est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O_{n-1} & * \\ \hline O & 1 \end{array}\right)$, donc 1 est aussi valeur propre.

Donc A est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(A) \subset \{0,1\}$, c'est-à-dire A projection, d'où (i).

4) a) On a $\chi_M(x) = x^2 - 1$, donc les valeurs propres sont 1 et -1.

En résolvant $MX = X$ et $MX = -X$, on obtient $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) On a $A = 2I_2 + M$, donc les valeurs propres sont 3 et 1.

Les sev propres sont aussi $E_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut donc prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Q convient **ssi** la première colonne est un vecteur propre de E_3 et la seconde un vecteur propre de E_1.

Donc les matrices Q sont les $\begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

5) a) Supposons (i). Alors $\det A \neq 0$, donc le polynôme χ_A convient (il annule A et $\chi_A(0) = (-\det A)^n \neq 0$).

Supposons (ii). 0 n'est pas racine P, donc n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible.

b) On a $\sum_{k=0}^m a_k A^k = O_n$, c'est-à-dire $AB = I_n$, où $B = -\sum_{k=1}^m \dfrac{a_k}{a_0} A^{k-1}$.

6) a) On a $MA = O_n$, donc $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} M$.

On considère une base adaptée à $\operatorname{Im} A \oplus S = \mathbb{C}^n$. Notons P la matrice de passage associée.

On obtient $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & O \end{array}\right)$, car $\operatorname{Im} M$ est stable par M.

On obtient $P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & N \end{array}\right)$, car $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} M$. De plus, $M^n = O$ donc $\left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & N^n \end{array}\right) = O$.

Ainsi, N est nilpotent. On a ainsi $A + M$ est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & N \end{array}\right)$, qui a même polynôme caractéristique que $P^{-1}AP$, car le polynôme caractéristique de N est de la forme x^p.

Remarque : Si on suppose $AM = O_n$, la conclusion est la même.

En effet, on a d'ailleurs $M^T A^T = O$, et M^T est nilpotente, car $(M^T)^n = (M^n)^T = O$.

Par a), A^T et $M^T + A^T$ ont même polynôme caractéristique, donc A et $M + A$ aussi.

7) On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & O \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A \in GL_p(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On suppose donc que la matrice A est carrée inversible.

a) On résout : $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AX + BY = \lambda X \\ 0 = \lambda Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AX = \lambda X \\ 0 = \lambda Y \end{cases}$

Donc $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ O \end{pmatrix}, X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_p) \right\}$.

L'application linéaire $K^p \to K^n$ $\begin{pmatrix} X \\ O \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est injective, donc conserve la dimension.

Donc $\dim \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_p)$.

b) On a $\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ car le rang d'une matrice est le rang des vecteurs lignes.

Donc $\mathrm{rg}\, M = p = \mathrm{rg}\, A$ car les colonnes de A forment une base de K^p.

c) Montrons que (i) implique (ii) :

La matrice A est la matrice de la restriction de M à $\mathrm{Vect}(E_1, ..., E_p)$.

Comme M est diagonalisable, A est diagonalisable.

Remarque : on pourrait aussi utiliser un polynôme annulateur de M, donc de A.

Montrons que (ii) implique (i) : Comme A est inversible, les λ_j ne sont pas nuls.

Par a), pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\dim \mathrm{Ker}(M - \lambda_j I_n) = d_j$.

D'autre part, par b), $\dim \mathrm{Ker}\, M = n - \mathrm{rg}\, M = n - p$.

Comme A est diagonalisable et inversible, on a donc $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = p$.

On a donc $\dim \mathrm{Ker}\, M + \sum_{j=1}^{p} \dim \mathrm{Ker}(M - \lambda_j I_n) = (n - p) + p = n$. Donc M est diagonalisable.

8) a) Le polynôme caractéristique de u est complexe de degré $n \geq 1$, donc admet au moins une racine, donc u admet un vecteur propre e_1, et la droite $D = \mathbb{C}e_1$ est stable par u.

b) Par le th de la base incomplète, on peut compléter une base de F en ajoutant des vecteurs de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire des vecteurs e_j, avec $j \in J$. Alors $G = \mathrm{Vect}(e_j)_{j \in J}$ est supplémentaire de F et stable par u.

c) Si $\dim E \geq 1$, u admet au moins un vecteur propre e_1 et la droite $\mathbb{C}e_1$ est stable par u.

Il existe un supplémentaire H stable par u. Si $\dim H \geq 1$, $u_{|H}$ admet au moins un vecteur propre e_2, qui est donc aussi un vecteur propre de u indépendant de e_1.

Ainsi, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ admet un supplémentaire stable par u, et on peut itérer le procédé.

On construit ainsi par récurrence une famille $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres linéairement indépendants, c'est-à-dire une base de vecteurs propres et u est diagonalisable.

9) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que que $AB = B(A + I_n)$.

a) On suppose (par l'absurde) que B est inversible. Alors A et $A + I_n$ sont semblables.

Or, $\mathrm{Sp}(A + I_n) = 1 + \mathrm{Sp}(A)$. Ainsi, si λ est valeur propre de A, alors $\lambda + 1$ est aussi valeur propre.

Ainsi, A admettrait une infinité de valeurs propres, ce qui est absurde.

b) Si $X \in \operatorname{Ker} B$, alors $BAX = 0$, car $BA = AB - B$ et $BX = 0$, donc $AX \in \operatorname{Ker} B$.

c) On se place dans une base adaptée à $\operatorname{Ker} B \oplus S = \mathbb{C}^n$.

On obtient $M^{-1}AM = \left(\begin{array}{c|c} C & * \\ \hline O & A_1 \end{array}\right)$ et $M^{-1}BM = \left(\begin{array}{c|c} O_r & * \\ \hline O & B_1 \end{array}\right)$.

La matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Il existe $Q \in GL_n(K)$ telle que $Q^{-1}CQ = T$ triangulaire sup.

On prend alors $P = \left(\begin{array}{c|c} Q & O \\ \hline O & I_{n-r} \end{array}\right) M$.

On obtient $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} Q^{-1}CQ & * \\ \hline O & A_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T & * \\ \hline O & A_1 \end{array}\right)$ et $P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} O_r & * \\ \hline O & B_1 \end{array}\right)$.

d) Les relations $AB = B(A + I_n)$ donnent (cf produits par blocs) $A_1B_1 = B_1(A_1 + I_{n-r})$.

On conclut en raisonnant par récurrence sur la dimension (car $n - r < n$) :

Il existe Q telle que $Q^{-1}A_1Q$ triangulaire supérieure et $Q^{-1}B_1Q$ triangulaire supérieure stricte.

On conclut avec la matrice de passage $\left(\begin{array}{c|c} Q & O \\ \hline O & I_{n-r} \end{array}\right)$.