**Interrogation n°9.** *Barème sur 24.5 pts.*

**1)** [1.5 pt] On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle.

En se plaçant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\det A > 0$.

**2)** [1.5 pt] Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

Donner une CNS sur la matrice $N$ pour que $A = \lambda I_n + N$ soit diagonalisable.

**3)** [3 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que deux des assertions suivantes impliquent la troisième :

(i) $A^2 = A$

(ii) $\operatorname{rg} A = 1$

(iii) $\operatorname{tr} A = 1$

**4)** a) [0.5 pt] Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de $M$.

b) [1.5 pt] Expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice $D$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

c) [1 pt] Expliciter sans justification TOUTES les matrices $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}AQ = D$.

*Remarque* : Il est possible de déduire de a) les matrices $Q$ sans *aucun* calcul supplémentaire.

**5)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

a) [2 pts] Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A$ est inversible

(ii) $A$ admet un polynôme annulateur $P(X)$ vérifiant $P(0) \neq 0$.

b) [1 pt] Montrer que dans ce cas, $A^{-1}$ est un polynôme en $A$. On posera $P(X) = \sum_{k=\mathbf{0}}^{m} a_k X^k$, avec $a_0 \neq 0$.

*Remarque* : On pourra expliciter sans justification $A^{-1}$ en fonction des $a_k$ et de $A$.

**6)** [2.5 pts] Soient $A$ et $M$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où $\boxed{M \text{ est nilpotente}}$.

On suppose $MA = O_n$. Montrer que $A$ et $A + M$ ont même polynôme caractéristique.

*Indication* :

Comparer $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} M$. Se ramener au cas de matrices $\left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & N \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec $N$ nilpotente.

**7)** On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & O \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A \in GL_p(\mathbb{C})$ inversible, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) [1.5 pt] Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ un complexe non nul. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n) = \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I_p)$.

*Indication* : Résoudre le système linéaire $M \left(\begin{array}{c} X \\ \hline Y \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c} X \\ \hline Y \end{array}\right)$.

b) [1 pt] Montrer que $\mathrm{rg}\, M = p$.

c) [3 pts] Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $M$ est diagonalisable

(ii) $A$ est diagonalisable

*Indication* : Pour (ii) $\Rightarrow$ (i), on notera $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de $A$ et $d_j = \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I_p)$.

**8)** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$.

*Les questions b) et c) sont indépendantes.*

a) [0.5 pt] On suppose $n \geq 1$. Montrer que $u$ admet au moins une droite stable $D$.

b) [0.5 pt] On suppose $u$ diagonalisable et on considère $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres.

Montrer que tout sev $F$ de $E$ admet dans $E$ un supplémentaire $G$ stable par $u$.

*Indication* : Utiliser le théorème de la base incomplète.

c) [1.5 pt] (★) On suppose que dans $E$, tout sev $F$ *stable* par $u$ admet un supplémentaire $G$ *stable* par $u$.

Montrer que $u$ est diagonalisable.

**9)** Soient $A$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que que $AB = B(A + I_n)$.

a) [1 pt] On suppose (par l'absurde) que $B$ est inversible. Que dire des matrices $A$ et $A + I_n$ ?

En déduire une contradiction.

b) [0.5 pt] Montrer que $\mathrm{Ker}\, B$ est stable par $A$.

c) [1 pt] Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice $T \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure avec $r \geq 1$ telles que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} T & * \\ \hline O & A_1 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} O_r & * \\ \hline O & B_1 \end{array}\right) \quad \text{avec } A_1 \text{ et } B_1 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$$

d) *Question hors-interrogation*. Montrer que $B$ est nilpotente et que $A$ et $B$ sont cotrigonalisables.