Interrogation n°8. Corrigé

1) Supposons (i).

Soit $(x_1, ..., x_n)$. Un des vecteurs x_j est combinaison linéaire des autres : $x_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i x_i$.

On a donc par linéarité $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i \neq j} \alpha_i f(x_1, ..., x_i, ..., x_i, x...) = 0$ car f alternée.

Suppsons (ii) Si $x_i = x_j$, alors $(x_1, ..., x_n)$ est liée, donc $f(x_1, ..., x_n) = 0$. Donc f est alternée.

2) a) On a $AB = B(AB)B^{-1}$, donc AB et BA sont semblables.

b) On a $AB = O_2 \neq E_{12} = BA$, et O_2 n'est semblable qu'à elle-même. Donc AB et BA ne sont pas semblables.

3) a) On a A de la forme $(2X_1, ., 2X_n)$, donc $\det A = 2^n \det(X_1, ., X_n)$, avec $X_j \in \mathbb{Z}^n$.

On vérifie alors (par récurrence) que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est entier.

Variante : On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ Immédiat pour $n = 1$.

Pour $n \geq 2$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$. On développe $\det A$ selon la première colonne :

On a $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} \Delta_{i1}$, avec Δ_{i1} divisible par 2^{n-1} (par hyp de rec) et a_{i1} divisible par 2.

Donc $\det A$ est divisible par 2^n.

b) *Première méthode* : On ajoute la première colonne aux autres colonnes.

Les coefficients des colonnes obtenues appartiennent à $\{-2, 0, 2\}$.

Le même raisonnement qu'au a) permet de prouver que les Δ_{i1} sont divisibles par 2^{n-1}.

Donc $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} \Delta_{i1}$ est divisible par 2^{n-1}.

Variante : En retranchant à C_j la première colonne C_1 multipliée par $\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, on obtient $\left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & * \\ \hline O & M \end{array}\right)$, où les coefficients de M appartiennent à $\{-2, 0, 2\}$.

Seconde méthode : On ajoute le vecteur $Z = (1, 1, ..., 1)$ à toutes les colonnes.

La matrice ainsi obtenue $A = (B_1 - Z, B_2 - Z, ..., B_n - Z)$ où B vérifie les hypothèses de a).

Or, en développant ce déterminant, on obtient $\det A = \det B - \sum_{j=1}^{n} \det(B_1, ..., B_{j-1}, Z, B_{j+1}, ..., B_n)$.

Or $\det(B_1, ..., B_{j-1}, Z, B_{j+1}, ..., B_n) = \frac{1}{2} \det(B_1, ..., B_{j-1}, 2Z, B_{j+1}, ..., B_n))$ qui vérifie a).

Donc $\det A$ est la somme de termes divisibles par 2^{n-1}.

4) a) Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Alors $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, u$, où $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, e_2)$. Donc A et B sont semblables.

b) On note u l'endomorphisme associé à A, et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, ..., e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

On considère alors la base $\mathcal{B} = (e_1, e_3, e_5, ..., e_{2n-1}, e_2, e_4, ..., e_{2n})$.

Alors $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, donc A est semblable à B.

5) a) Par linéarité en chaque ligne, $d = abc\, V(a, b, c)$.

b) En développant $V(a, b, c, x)$ selon la dernière ligne, on obtient un polynôme en x dont le coefficient en x^2 vaut $-d$ (qui est le cofacteur associé au terme x^2 dans la matrice de Van der Monde).

Or, $V(a, b, c, x) = V(a, b, c)(x - a)(x - b)(x - c)$. Donc $d = V(a, b, c)(a + b + c)$.

6) a) On part de $\delta(1, X, ..., X^{n-1})$.

En ajoutant à la dernière colonne une combinaison linéaire des précédentes, on obtient :

$$\delta(1, X, ..., X^{n-1}) = \delta(1, X, ...X^{n-2}, P_{n-1})$$

On procède de même en ajoutant à l'avant-dernière colonne une combinaison linéaire des précédentes.

Par récurrence immédiate, on obtient finalement $\delta(1, X, ..., X^{n-1}) = \delta(1, P_1, ..., P_{n-1})$, et $P_0 = 1$.

b) On prend $P_j(X) = \prod_{i=0}^{j-1}(X - a_j)$, c'est-à-dire $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X - a_1$, etc ...
On a $P_j(a_i) = 0$ pour tout $i \leq j$.
Ainsi, $\delta(P_0, P_1, ..., P_{n-1})$ est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure.
Le déterminant est le produit des coefficients diagonaux : $\delta(P_0, P_1, ..., P_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1} P_j(a_i) = \prod_{j>i}(a_j - a_i)$.
Ce qui permet de retrouver Van der Monde, car $\det((a_i)^{j-1})_{1\leq i\leq n, 0\leq j<n}) = \delta(1, X, ..., X^{n-1})$.

7) a) On pose $P(x) = \det(M + xN)$. Ainsi, P est un polynôme en t à coefficients réels.
Le polynôme P n'est pas nul, car $P(i) = \det(M + iN) \neq 0$. Donc P admet un nombre fini de racines, et en particulier, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) \neq 0$, c'est-à-dire $M + xN \in GL_n(\mathbb{R})$.

b) On pose $P = M + iN$. Par a), comme $P \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q = M + xN \in GL_n(\mathbb{R})$.
Or, on a $AP = PB$, c'est-à-dire $AM = MB$ et $AN = NB$ en identifiant partie réelle et partie imaginaire.
(*remarque* : il est essentiel ici que A soit réelle de sorte que AM, MB, AN, NB le soient aussi).
Par linéarité, on obtient $A(M + xN) = (M + xN)B$, c'est-à-dire $Q^{-1}AQ = B$.

8) a) On a $u(e'_j) = \lambda^j u(e_j) = \lambda^j \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i = \lambda^j \sum_{i=1}^n a_{ij}\dfrac{e'_i}{\lambda^i}$, donc $\boxed{b_{ij} = \dfrac{\lambda^j}{\lambda^i}a_{ij} = \lambda^{j-i}a_{ij}}$.

Remarque : On peut aussi utiliser $B = D^{-1}AD$, où $D = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Diag}(\lambda, \lambda^2, ..., \lambda^n)$.
Pour passer de A à B, on multiplie la j-ième par λ^j et on divise la i-ième ligne par λ^i.

b) On a $\forall i > j$, $a_{ij} = 0$. Il suffit donc de trouver λ tel que $\forall i < j$, $\lambda^{j-i}|a_{ij}| \leq \varepsilon$.
Or, pour $0 < \lambda \leq 1$, on a $\lambda^{j-i} \leq \lambda$, donc il suffit de prendre $\lambda \leq 1$ assez petit de sorte que $\lambda \ \max_{1\leq i<j\leq n}|a_{ij}| \leq \varepsilon$.

9) a) Comme f et g ne sont pas colinéaires, on ne peut pas avoir ni $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ ni $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$.
Il existe donc $x \in (\mathrm{Ker}\, g) \setminus (\mathrm{Ker}\, f)$. D'où $(f(x), g(x)) = (\alpha, 0)$, avec $\alpha \neq 0$.
De même, il existe y tel que $(f(y), g(y)) = (0, \beta)$, avec $\beta \neq 0$. Alors les vecteurs $\dfrac{x}{\alpha}$ et $\dfrac{y}{\beta}$ conviennent.
b) Supposons $\alpha x + \beta y = 0$. En composant par f et par g, on obtient $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
Donc (x, y) est libre.
c) (*analyse*) Soit $z \in E$. Supposons $z = t + \alpha x + \beta y$, où $t \in F$.
En composant par f et g, on obtient $\alpha = f(z)$ et $\beta = g(z)$. D'où l'unicité et donc $F \oplus \mathrm{Vect}(x, y)$.
(*synthèse*) On vérifie que $t = z - f(z)x - g(z)y$ appartient à F : on a bien $f(t) = 0$ et $g(t) = 0$.
On a donc bien $F \oplus \mathrm{Vect}(x, y) = E$.

10) L'idée est de chercher la matrice de u dans la base canonique des E_{ij} dans un ordre bien choisi.
On utilise la formule bien connue $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.
On a $AE_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}E_{ki}\right)E_{ij} + O = \sum_{k=1}^n a_{ki}E_{kj}$.
On prend $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{31}, ..., E_{n1}, E_{12}, ..., E_{n2}, ..., E_{1n}, ..., E_{nn})$ pour faire apparaître des colonnes de A. On obtient la matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} A & O_n & O_n \\ O_n & \ddots & O_n \\ O_n & O_n & A \end{pmatrix}, \text{ donc } \det u = (\det A)^n.$$

b) On écrit $w = v \circ u$, avec $v : M \longmapsto MB$. On reprend la preuve a) avec v, mais en inversant i et j.
Autrement dit, on considère $\mathcal{B}' = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, ..., E_{1n}, E_{21}, ..., E_{2n}, ..., E_{n1}, ..., E_{nn})$.
On en déduit aisément $\det v = (\det B)^n$., donc $\det w = (\det A)^n(\det B)^n$.