Interrogation n°7. Corrigé

1) On suppose

- Les f_n continues par morceaux et intégrables

- Pour tout $t \in I$, la série $\sum f_n(t)$ converge et la fonction $S : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue par morceaux.

- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors S est intégrable et $\int_I S(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ dt$.

2) a) Posons $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}\ (1 - e^{-tx})$. L'application g est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

On a $g(t) \sim_0 xf(t)$ et $g(t) = O_{+\infty}(f(t))$. Donc g es tintégrable.

b) - Pour tout $t > 0$, $x \longmapsto g(x,t)$ est de classe C^1, et $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = f(t)e^{-tx}$ continue par morceaux en t.

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a $|g(x,t)| \leq |f(t)|$ intégrable sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que L est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et $L'(x) = x \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-tx}\ dt$.

3) On peut prendre $E_{11}E_{12} = O_2$ et $E_{12}E_{11} = O_2$.

Plus généralement, on choisit A et $B \in \mathcal{M}_2(K)$ de rang 1 telles que $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} B$.

4) a) On a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, donc par le th du rang, $r \leq n - r$, c'est-à-dire $r \leq \frac{1}{2}n$.

b) On considère une base $(e_1, ..., e_r)$ de S supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

Par le lemme fondamental de l'algèbre linéaire, on a $(u(e_1), ..., u(e_r))$ base de $\operatorname{Im} u$.

Comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, alors $(e_1, ..., e_r, (u(e_1), ..., u(e_r))$ est **libre**.

Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base de E.

Remarque : En fait, on peut choisir les $f_{2r+1}, ..., f_n$ dans $\operatorname{Ker} u$, en complétant $(u(e_1), ..., u(e_r))$ en une base de $\operatorname{Ker} u$.

On obtient alors une base $\mathcal{B}$ adaptée à $S \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

5) a) On a $u = \sum_{i=1}^r v_i \circ p_i$.

Remarque : Supposons $u_{|F_i} = v_i$. Alors $u(x) = u(\sum_{i=1}^r p_i(x)) = \sum_{i=1}^r u(p_i(x)) = \sum_{i=1}^r v_i(p_i(x))$.

Réciproquement, $\sum_{i=1}^r v_i \circ p_i$ est bien linéaire et on a bien $\forall x \in F_i$, $(\sum_{i=1}^r v_i \circ p_i)(x) = v_i(x) + \overrightarrow{0} = u(x)$.

Remarque : Dans une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_r$ adaptée à $F_1 \oplus ... \oplus F_r = E$ et $\mathcal{C}$ base de E,

on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, u = \begin{pmatrix} A_1 & | & \cdots & | & A_r \end{pmatrix}$, où $A_i = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_i,\mathcal{C}}\, v_i$.

6) a) On a $NE_1 = 0$ et $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $NE_j = E_{j-1}$.

b) On a donc $N^k E_j = E_{j-k}$ si $j > k$, et 0 sinon.

Donc $N = (0, 0, ..., 0, E_1, E_2, ..., E_{n-k})$ si $k < n$, et $N^k = O_n$ pour $k \geq n$.

c) On a $(I_n - N)(I_n + N + N^2 + ... + N^{n-1}) = I_n - N^n = I_n$ car $N^n = O_n$. D'où le résultat.

7) a) Supposons (i). Alors les colonnes de A appartiennent à un même vecteur $X \in K^n$.

On a donc $A = (y_1 X, ..., y_n X) = XY^T$, avec $X \in K^n$ et $Y \in K^p$ non nuls car $\mathrm{rg}\, A = 1$.

Supposons (ii). Alors $A = (y_1 X, ..., y_n X)$ de rang 1, car les $y_j X$ ne sont pas tous nuls.

b) $\mathrm{Im}(A + B) \subset \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$, car $(A + B)X = AX + BX$.

Donc $\mathrm{rg}(A + B) \leq \dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \leq \dim(\mathrm{Im}\, A) + \dim(\mathrm{Im}\, B) = \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B$.

c) On a $M = A + B$, avec $A = (\mathrm{sh}(i)\, \mathrm{ch}(j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $B = (\mathrm{ch}(i)\, \mathrm{sh}(j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Par a), $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B = 1$, donc par b), $\mathrm{rg}(A + B) \leq \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B = 2$.

d) La sous-matrice $\begin{vmatrix} \mathrm{sh}\, 2 & \mathrm{sh}\, 3 \\ \mathrm{sh}\, 3 & \mathrm{sh}\, 4 \end{vmatrix} = \mathrm{sh}\, 2\, \mathrm{sh}\, 4 - (\mathrm{sh}\, 3)^2 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}(6) + \mathrm{ch}(2) - \mathrm{ch}(6) - 1) = \dfrac{\mathrm{ch}(2) - 1}{2} \neq 0$.

Donc M est de rang ≥ 2 (rang de la sous-matrice), d'où $\mathrm{rg}\, M = 2$.

8) *Première preuve* : On pose $G_k = F_1 + ... + F_k$, avec notamment $G_0 = \{0\}$.

Par applications successives de Grassmann, $\dim(G_n) = \sum_{k=1}^n \dim(F_k) - \sum_{k=1}^n \dim(G_{k-1} \cap F_k)$.

Donc $\dim(G_n) = \sum_{k=1}^n \dim(F_k)$ ssi $\forall k$, $G_{k-1} \cap F_k = \{0\}$, donc ssi les sev F_k sont en somme directe.

Variante : *Deuxième preuve* : On raisonne par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$. Immédiat pour $p = 1$.

Le cas $p = 2$ résulte de la formule de Grassmann : $\dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1 \cap F_2)$.

Supposons la propriété vraie au rang p.

Soient $F_1, ..., F_{p+1}$ tels que $\dim(F_1 + ... + F_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} \dim(F_k)$. Posons $G = F_1 + F_2 + ... + F_p$.

L'hypothèse s'écrit donc (H) : $\dim(G + F_{p+1}) = \sum_{k=1}^p \dim(F_k) + \dim(F_{p+1})$.

Attention, pour pouvoir appliquer l'hyp de réc, il faut prouver que $\dim G = \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$.

Or, on a toujours $\dim G \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$.

Donc par l'hypothèse (H), on a nécessairement : $\dim(G) = \sum_{k=1}^p \dim(F_k)$.

Donc par hyp de rec, on a $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$.

De plus, on a donc aussi $\dim(G + F_{p+1}) = \dim(G) + \dim(F_{p+1})$, donc par le cas $p = 2$, on a $G \oplus F_{p+1}$.

D'où $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p \oplus F_{p+1}$.

Troisième preuve : Considérons des bases $\mathcal{B}_k$ des F_k.

Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_p$ est une famille génératrice de $G = F_1 + F_2 + ... + F_p$.

Par hypothèse, $\dim G = \sum_{k=1}^p \dim F_k = \sum_{k=1}^p \mathrm{card}\, \mathcal{B}_k = \mathrm{card}\, \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{B}$ est libre. Donc $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$.

Quatrième preuve : On considère $u : F_1 \times F_2 \times ... \times F_p \to F_1 + F_2 + ... + F_p$.

u est linéaire surjective. Par hypothèse, $\dim(F_1 + F_2 + ... + F_p) = \sum_{k=1}^p \dim F_k = \dim(F_1 \times F_2 \times ... \times F_p)$.

Donc u est bijective, et en particulier injective, c'est-à-dire $F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_p$.

b) On a $u_1 + ... + u_p = \mathrm{Id}$, donc $\mathrm{Im}\, u_1 + ... + \mathrm{Im}\, u_p = E$. Par a), $\mathrm{Im}\, u_1 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, u_p = E$.

On a $\forall x \in E$, $x = u_1(x) + ... + u_p(x)$ et $u_i(x) \in \mathrm{Im}\, u_i$.

Par unicité de la décomposition, $u_i(x)$ est donc le projeté de x sur $\mathrm{Im}\, u_i$ parallèlement à F_i.

9) a) Cas particulier : $A = J_r$. On prend $B = (J_r)^T = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.

Cas général : On sait que A s'écrit QJ_rP, avec $Q \in GL_n(K)$ et $P \in GL_p(K)$.

On prend alors $B = P^{-1}(J_r)^T Q^{-1}$.

b) Comme $\mathrm{rg}(ABA) \leq \mathrm{rg}(AB) = \dim A \leq \mathrm{rg}(B)$, donc $\mathrm{rg}\, A \leq \mathrm{rg}\, B$. De même, $\mathrm{rg}\, B \leq \mathrm{rg}\, A$.

Rappels : On a $\mathrm{Im}(u \circ v) = u(\mathrm{Im}\, v) \subset \mathrm{Im}\, u$, donc $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \mathrm{rg}(u)$.

Et $\mathrm{Im}(u \circ v) = \dim(\mathrm{Im}\, v) - \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, v) \leq \mathrm{rg}\, v$.

10) a) Oui : On peut prendre $n < p$ et les matrices $A = \left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n-p} \end{array}\right)$ et $B = \begin{pmatrix} I_n \\ O_{n-p} \end{pmatrix}$

b) Non : Quitte à permuter les rôles, on peut supposer $p < n$.

On a $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p) = p$. Donc $\mathrm{rg}(AB) < n$, et a fortiori, $AB \neq I_n$.

11) a) $\varphi : E_p \to \mathbb{C}^p \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_0, ..., u_{p-1})$ est un isomorphisme linéaire.

Remarque : Ainsi, les $\varphi^{-1}(E_j)$, avec $0 \leq j < p$, forment une base de E_p.

b) On a $\varphi(T_\omega) = (1, \omega, ..., \omega^{p-1})$.

Les vecteurs $(1, \omega, ..., \omega^{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, avec $\omega \in U_p$, forment une base de $\mathbb{C}^p$, car la matrice associée est une matrice de Van der Monde inversible d'ordre p. Donc $\mathcal{B}$ est une base de E_p.

c) Si u et v sont des suites complexes respectivement périodiques de périodes p et q, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, la suite $\lambda u + \mu v$ est périodique de période pq. Donc E est un sev (stable par combinaison et contient la suite nulle).

d) $\mathcal{B}$ engendre E, car elle engendre tous les E_p (par b)). Pour prouver que la famille est libre, il suffit de noter que toute famille finie de $\mathcal{B}$ appartient à l'un des E_p, donc est libre (par b)).

Remarque : En fait, T_ω est vecteur propre de l'endomorphisme $S : E \to E \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.