**Interrogation n°7.** *Barème sur 24 pts*

**1)** [1.5 pt] Soient, pour $n \in \mathbb{N}$, des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

Enoncer le théorème ITT garantissant que $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, dt$.

**2)** Soit $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $\boxed{\text{intégrable}}$.

On considère $\forall x \geq 0$, $L(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}\,(1 - e^{-tx})\, dt$.

a) [1.5 pt] Montrer que $L(x)$ est bien définie pour tout réel $x \geq 0$.

b) [1.5 pt] Montrer que $L$ est de classe $C^1$ sur $[0, +\infty[$. On posera $\forall x \geq 0,\ \forall t > 0,\ g(x,t) = \dfrac{f(t)}{t}\,(1 - e^{-tx})$.

**3)** [0.5 pt] Expliciter sans justification deux matrices de $\mathcal{M}_2(K)$ telles que $AB = O_2$ et $BA \neq O_2$.

**4)** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un ev $E$ de dimension $n$ tel que $\boxed{u \circ u = 0}$.

a) [0.5 pt] En comparant $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ pour l'inclusion, montrer que $r = \operatorname{rg} u$ vérifie $r \leq \frac{1}{2}n$.

b) [2 pts] Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ de la forme $(e_1, ..., e_r, u(e_1), ..., u(e_r), f_{2r+1}, ..., f_n)$.

**5)** [1 pt] Soient $E = F_1 \oplus ... \oplus F_r$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$.

Pour $x \in E$, on note $p_i(x) \in F_i$ les vecteurs tels que $x = \sum_{i=1}^{r} p_i(x)$.

On sait que les applications $p_i : E \to F_i$ sont linéaires (projections).

Soient des applications linéaires $v_i \in \mathcal{L}(F_i, E)$, avec $1 \leq i \leq r$.

Il existe un unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, E)$ tel que $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $u_{|F_i} = v_i$.

Expliciter sans justification $u$ en fonction des $v_i$ et des $p_i$.

**6)** On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j-1})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

a) [0.5 pt] On note $E_j$ le $j$-ième vecteur de la base canonique de $K^n$. Que vaut $NE_j$ ?

b) [1 pt] Déterminer la matrice $N^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) [1 pt] Justifier brièvement que $(I_n - N)^{-1} = I_n + N + N^2 + ... + N^{n-1}$.

**7)** *Matrices de rang 1*

a) [1.5 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\operatorname{rg} A = 1$

(ii) Il existe $X \in K^n$ et $Y \in K^p$ non nuls tels que $A = XY^T$, c'est-à-dire $A = (x_i y_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

b) [1 pt] Soient $A$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Montrer que $\operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

c) [1 pt] On considère la matrice carrée $M = (\operatorname{sh}(i + j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\operatorname{rg} M \leq 2$.

d) *Question hors-interrogation.* Montrer que pour $n \geq 2$, $\mathrm{rg}\, M = 2$.

**8)** a) [1.5 pt] Soient $F_1, ..., F_p$ des sev de $E$. On suppose $\dim(F_1 + F_2 + ... + F_p) = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$.

Montrer avec soin que les sev $F_1, F_2, ..., F_p$ sont en somme directe.

b) [1.5 pt] Soient $u_1, ..., u_p$ des endomorphismes de $E$ tels que $\sum_{i=1}^{p} u_i = \mathrm{Id}$ et $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rg}(u_i) = n = \dim E$.

Avec a), montrer que, pour tout $i$, le vecteur $u_i(x)$ est le projeté de $x$ sur $\mathrm{Im}\, u_i$ parallèlement à $F_i = \oplus_{j \neq i} \mathrm{Im}\, u_j$.

**9)** *Pseudo-inverses d'une matrice.* Les questions a) et b) sont indépendantes.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

a) [2 pts] Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ telle que $ABA = A$ et $BAB = B$.

*Indication* : Commencer par le cas $A = J_r$, où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

b) [1 pt] Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ telle que $ABA = A$ et $BAB = B$. Montrer que $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, B$.

**10)** [1 pt] Si *Oui*, donner un exemple. Si *Non*, justifier votre réponse.

a) Existe-t-il des entiers $n \neq p$ et des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ tels que $AB = I_n$ ?

b) Existe-t-il des entiers $n \neq p$ et des matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ tels que $AB = I_n$ et $BA = I_p$ ?

**11)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

On note $E_p$ le sev des suites complexes $p$-périodiques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire vérifiant $u_{n+p} = u_n$.

Pour $\omega \in \mathbb{C}$, on considère la suite géométrique $T_\omega = (\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) [0.5 pt] Expliciter sans justification un isomorphisme $\varphi$ justifiant que $\dim E_p = p$.

b) [1 pt] Montrer que $\mathcal{B} = (T_\omega)_{\omega\in U_p}$ est une base de $E_n$.

c) [1 pt] On pose $E = \bigcup_{p\geq 1} E_p$ (ensemble des suites complexes $p$-périodiques). Montrer que $E$ est un sev.

d) *Question hors-interrogation.* On pose $\Delta = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \exists\, p \in \mathbb{N}^*,\, \omega^p = 1\}$.

Montrer que $\mathcal{B} = (T_\omega)_{\omega\in\Delta}$ est une base de $E$ c'est-à-dire que tout élément de $E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $\mathcal{B}$.