Interrogation n°6. Corrigé

Exercice A

1) L'application f' est continue sur $[0,+\infty[$ et converge en $+\infty$, donc est bornée. Posons $M = \sup |f'|$.

Posons $\forall(\theta,x) \in]0,1] \times [0,+\infty[$, $g(\theta,x) = f'(\theta x)$. On a :

- Pour tout $x \geq 0$, $\theta \longmapsto f'(\theta x)$ est continue donc intégrable sur $]0,1]$

- Pour tout $\theta > 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} g(\theta,x) = L$

- *Domination* : On a $\forall x \in [0,+\infty[$, $|g(\theta,x)| \leq M = \varphi(\theta)$, et φ est intégrable sur $[0,1]$.

Donc, par convergence dominée, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f'(\theta x)\ d\theta = \int_0^1 L\ d\theta = L$.

2) On a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt = f(0) + x\int_0^1 f'(\theta x)\ d\theta$. Par 1), on obtient $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$.

Exercice B

1) Quitte à prolonger f par 0 sur $[1,+\infty[$, on peut supposer $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et bornée.

On a alors $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\ e^{-tx}\ dt$.

L'intégrale est définie pour tout $x > 0$, car $f(t)\ e^{-tx} = O_{+\infty}(e^{-tx})$ et $x > 0$.

Le changement de variable $u = tx$ donne $L(x) = \dfrac{1}{x}J(x)$, où $J(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}\ du$. On a alors :

- $\forall u \geq 0$, $\lim_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u} = f(0)$

- *Domination* : $\forall x > 0$, $\left|f\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}\right| \leq Me^{-u} = \varphi(u)$, où $M = \sup |f|$. On a bien φ intégrable sur $[0,+\infty[$,

On en déduit par convergence dominée que $\lim_{x\to+\infty} J(x) = \int_0^{+\infty} f(0)\ e^{-u}\ du = f(0)$. Donc $L(x) \sim \dfrac{f(0)}{x}$.

Remarque : Une autre solution consiste à utiliser $J(x) = \int_0^x f\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}\ du = \int_0^{+\infty} g(u,x)\ du$,

où $g(u,x) = f\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}$ si $u \in [0,x]$ et $g(u,x) = 0$ si $u > x$. On a alors $\forall x > 0$, $|g(u,x)| \leq \varphi(u)$.

2) On utilise le changement de variable $\theta = \tan(t)$, avec $t \in [0,\dfrac{\pi}{4}]$. On a $d\theta = (1+\tan^2 t)\ dt$.

On obtient $J(x) = \int_0^{\pi/4}(1+\tan^2 t)\ e^{-xt}\ dt$.

On applique 1) à la fonction $f : \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1+\tan^2 t$

(le fait de remplacer $[0,1]$ par $[0,\frac{\pi}{4}]$ ne modifie en rien la preuve de la démonstration).

Comme f est continue et que $f(0) = 0$, on en conclut que $J(x) \sim \dfrac{1}{x}$.

3) Deux solutions :

Première méthode (conseillée) : On utilise une IPP : On a $L(x) = -\dfrac{f(1)e^{-x}}{x} + \dfrac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\ e^{-tx}\ dt$.

En appliquant 1) à f', on a $\int_0^1 f'(t)\ e^{-tx}\ dt \sim \dfrac{f'(0)}{x}$. Comme $e^{-x} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on obtient $L(x) \sim \dfrac{f'(0)}{x^2}$.

Seconde méthode : On a $x^2L(x) = \int_0^{+\infty} xf\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}\ du$.

Comme $f(0) = 0$, on a $f(h) \sim f'(0)h$ en $h = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} xf\left(\dfrac{u}{x}\right) = f'(0)$.

Par l'IAF, on a $\forall x \in [0,+\infty[$, $|f(h)| \leq Mh$, où $M = \sup_{[0,1]} |f'|$. D'où la domination $\left|xf\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}\right| \leq Me^{-u}$.

Exercice C

1) a) La série converge absolument donc converge.

b) Posons $f_n(x) = (-1)^n e^{-a_k x}$. On a $\int_0^{+\infty} |f_n| = \dfrac{1}{a_n}$.

Comme $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge, alors par le th ITT, f est intégrable et $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{a_n}$.

2) a) Résulte du critère spécial des séries alternées : La suite $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0.

b) On ne peut pas utiliser le théorème ITT, car la série $\sum \int_0^{+\infty} e^{-a_k x}\ dx = \sum \dfrac{1}{a_n}$ peut diverger.

L'idée est d'appliquer le th de cv dominée aux sommes partielles, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-a_k x}$.

Par l'encadrement classique des sommes partielles des séries alternées, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq S_n(x) \leq e^{-a_0 x} = \varphi(x)$.

Et φ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par convergence dominée, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx$.

Or, par linéarité, $\int_0^{+\infty} S_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-a_k x}\ dx = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{a_k}$.

Donc par cv dominée, $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} S_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{a_n} = \lambda$.

Autre méthode : On utilise la propriété sur les restes des séries alternées : $|f(x) - S_n(x)| \leq e^{-a_{n+1}x}$.

Donc $\left|\int_0^{+\infty} f(x)\ dx - \int_0^{+\infty} S_n(x)\ dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x) - S_n(x)|\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-a_{n+1}x}\ dx = \dfrac{1}{a_{n+1}} \to 0$.

On en déduit $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} S_n(x)\ dx = \lambda$.

Autre méthode (déconseillée) : On pourrait regrouper les termes deux par deux dans les séries alternées $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$, ce qui ramène à une série de fonctions positives à laquelle on peut appliquer le th ITT.

Exercice D

1) On pose $f(t, x) = t^{x-1}F(t)$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = (\ln t)^n t^{x-1} F(t)$.

Ces fonctions sont intégrables, car $(\ln t)^n t^{x-1} F(t) = O_{+\infty}(F(t))$ et $(\ln t)^n t^{x-1} = O(t^{y-1})$, où $y = \dfrac{x}{2}$.

On a $\forall x \in [a, b] \subset]0, 1[$, $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)\right| \leq \varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|^n\ t^{a-1} F(t) \text{ si } t \in]0, 1[\\ |\ln t|^n\ t^{b-1} F(t) \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$, et φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

Donc G est de classe C^∞ sur $]0, 1[$, et $G^{(n)}(x) = \int_0^1 (\ln t)^n t^{x-1} F(t)\ dt$.

2) a) $|fg|\ \omega \leq \dfrac{1}{2}(f^2\omega + g^2\omega)$, donc $fg\ \omega$ est bien intégrable.

On a $0 \leq (f+g)^2\omega = (f^2\omega + g^2\omega) + 2fg\omega$ somme de fonctions intégrables, donc $f + g \in E$.

b) On applique a) avec la fonction $\omega(t) = t^{x-1}F(t)$ strictement positive et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On a alors $G'(x) = \langle 1, \ln t\rangle$, $G(x) = \|1\|^2$ et $G''(x) = \|\ln t\|^2$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc $G'(x)^2 \leq G(x)G''(x)$.

c) On a $(\ln G)'' = \left(\dfrac{G'}{G}\right) = \dfrac{G''G - (G')^2}{G^2} \geq 0$ par b). Donc $\ln G$ est convexe.

Remarque culturelle : De façon analogue, la fonction $\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Exercice E

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme g est bornée, $f(t)g(x-t) = O_{-\infty}(f(t))$ et $f(t)g(x-t) = O_{+\infty}(f(t))$.

Comme f est intégrable, alors par comparaison, il en est de même de $t \longmapsto f(t)g(x-t)$.

b) On a :

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue.

- Domination : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)g(x-t)| \leq \varphi(t) = M\,|f(t)|$, où $M = \sup_{\mathbb{R}} |g|$. Ainsi, φ est intégrable.

On en déduit que $f * g$ est continue.

c) Par a), G_λ est bien définie. On a $\forall \lambda > 0$, $G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(\lambda t)g(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g\left(x - \dfrac{u}{\lambda}\right)\,du$.
On fixe x. On a $\forall u$, $\lim_{\lambda \to +\infty} f(u)g\left(x - \dfrac{u}{\lambda}\right) = f(u)g(x)$.
Domination : $\forall \lambda$, $\left|f(u)g\left(x - \dfrac{u}{\lambda}\right)\right| \leq M\,|f(t)|$, où $M = \sup_{\mathbb{R}} |g|$.
On en déduit par convergence dominée que $\lim_{\lambda \to +\infty} G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x)\,du = g(x)$.

2) a) On a $(f * g)(x) = \int_\alpha^\beta f(t)g(x-t)\,dt$, d'où l'existence de $(f * g)(x)$ comme intégrale sur un segment.

b) Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note que $\forall x \in [a, b]$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $(x - t) \in [a - \beta, b - \alpha] = V$.

On a donc $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $|f(t)g(x-t)| \leq \varphi(t)$, où $\varphi(t) = |f(t)| \sup_V |g|$. On a φ intégrable sur $[\alpha, \beta]$.

On en déduit que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.