Interrogation n°6. *Barème sur 23.5 pts*

A l'exception de l'exercice A, on ne mentionnera que les hypothèses de *domination* lors de l'application de la convergence dominée ou des théorèmes sur les intégrales paramétrées.

Exercice A. *Preuve du théorème de Cesàro par la convergence dominée*

On considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$, où $L \in \mathbb{R}$.

1) [2 pts] Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f'(\theta x)\ d\theta = L$.

On pourra supposer connue une propriété classique sur les fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui convergent en $+\infty$.

2) [1 pt] Déduire de 1) que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$.

Exercice B

1) [2.5 pts] Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux (donc bornée).

On suppose de plus que f est continue en 0 et que $f(0) \neq 0$. On pose $\forall x > 0,\ L(x) = \int_0^1 f(t)\ e^{-tx}\ dt$.

En utilisant un changement de variable, justifier avec soin que $L(x) \sim \dfrac{f(0)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) [1.5 pt] En utilisant 1), déterminer un équivalent de $J(x) = \int_0^1 e^{-x\arctan(\theta)}\ d\theta$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) [1.5 pt] On suppose $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

En utilisant 1), montrer que $L(x) \sim \dfrac{f'(0)}{x^2}$.

Exercice C. *Deux exemples caractéristiques d'intégration terme à terme*

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge.

On *admet* que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

a) [0.5 pt] Justifier l'existence de $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{a_n}$.

b) [2 pts] Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{a_n}$.

2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels telle que $a_0 > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

a) [0.5 pt] Justifier l'existence de $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{a_n}$.

b) [2 pts] On *admet* que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \lambda$.

Exercice D

Soit $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, strictement positive et intégrable.

On pose $\forall x \in]0, 1[\ G(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} F(t)\ dt$.

1) [2.5 pts] Montrer que G est de classe C^∞ sur $]0, 1[$.

2) Soit $\omega :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

On note E l'espace des fonctions continues $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que $\int_0^{+\infty} f(t)^2\ \omega(t)\ dt < +\infty$.

a) [1 pt] Montrer que si f et $g \in E$, alors $\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)|\ \omega(t)\ dt < +\infty$ et $f + g \in E$.

On en déduit (*admis ici*) que E est un sev de $C^0(]0, +\infty[$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \omega(t)\ dt$$

b) [1 pt] En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \ \ G(x)G''(x) \leq G'(x)^2$$

c) [0.5 pt] En déduire que $x \longmapsto \ln G(x)$ est convexe sur $]0, 1[$.

Exercice E. *Produit de convolution*

Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications continues.

1) [3 pts] On suppose f intégrable et g bornée.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)\ dt$ est bien définie.

b) Montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) On suppose de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$. On pose $\forall \lambda > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(t) = \lambda f(\lambda t)$.

On pose $G_\lambda(x) = (f_\lambda * g)(x)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\lambda \to +\infty} G_\lambda(x) = g(x)$.

2) [2 pts] On suppose f à support compact : il existe un segment $[\alpha, \beta]$ tel que $\forall t \notin [\alpha, \beta]$, $f(t) = 0$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)\ dt$ est bien définie.

b) Montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.