Interrogation n°5. Corrigé

1) a) Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$, où $1 < \beta < 2\alpha$, donc $\sum w_n$ converge.

Si $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$, $w_n \geq \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand, donc $\sum w_n$ diverge.

b) On a $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n} - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \dfrac{(\ln n)^2}{2n^{2\alpha}}$.

- La série $\sum \varepsilon_n$ converge ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

- La série $\sum \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ converge par le critère des séries alternées :

En effet, $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$ tend vers 0 et est décroissante, car on a $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\ln t}{t}\right) = -\dfrac{\ln t}{t^2} + \dfrac{1}{t^2} \leq 0$ pour $t \geq e$.

- Donc la série $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

2) a) La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0, donc $\sum(-1)^n R_n$ converge pour tout $\alpha > 1$.

b) Par comparaison entre séries et intégrales, on a $R_n \geq \int_n^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{3/2}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, car $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ décroît.

Donc la série à termes positifs $\sum R_n$ diverge.

3) Contre-exemple : $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

Remarque : En revanche, *Vrai* si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, car pour n assez grand, on a alors $(u_n)^2 \leq u_n \leq 1$.

4) a) On fixe $x \geq 0$. On a : $\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right) = \dfrac{x}{n(n+x)} \sim \dfrac{x}{n^2}$, donc $\sum\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)$ converge.

b) $\sum_{n=1}^N \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p}\right) = \sum_{n=1}^N \dfrac{1}{p} - \sum_{n=1}^N \dfrac{1}{n+p}$ par télescopage. Donc $f(p) = \sum_{n=1}^N \dfrac{1}{p} \sim \ln p$.

Remarque : Pour x réel, on a $f(p) \leq f(x) \leq f(p+1)$, où $p = \lfloor x \rfloor$, car f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $\ln(p+1) = \ln p + \ln(1+1/p)$, alors $\ln(p+1) \sim \ln p$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, alors p tend vers $+\infty$. Par pincement, on a donc $f(x) \sim_{+\infty} \ln x$.

Ce résultat peut aussi être obtenu directement par une comparaison avec une intégrale :

On a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(n+x)}$ et on compare $f(x)$ avec $\int_1^{+\infty} \dfrac{x}{t(t+x)}\, dt = \left[\ln\left(\dfrac{t}{t+x}\right)\right]_{t=1}^{t=+\infty} = \ln(x+1) \sim_{+\infty} \ln x$.

5) a) On a $I_n = \left[\dfrac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \dfrac{3nt^3}{(1+t^3)^{n+1}} = 0 + 3n(I_n - I_{n+1})$, car $t^3 = (1+t^3) - 1$.

b) On a $(\ln u_{n+1} - \ln u_n) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right) + \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

On a $\ln\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{3n+1}\right) = -\dfrac{1}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $(\ln u_{n+1} - \ln u_n) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et ainsi, $\sum(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ converge.

On en déduit que la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mu \in \mathbb{R}$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda = e^\mu$.

On en conclut $I_n \sim \lambda n^{-1/3}$.

6) a) $a_n = R_{n-1} - R_n$

b) *Remarque* : $\sum_{k=1}^n k a_k = \sum_{k=1}^n k(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)R_k - \sum_{k=0}^n kR_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n$.

Comme $\sum a_n$ vérifie le CSSA, alors $|R_n| \leq a_{n+1}$, donc a fortiori $\lim_{n\to+\infty} nR_n = 0$.

La série $\sum na_n = \sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est la série harmonique alternée dont la somme vaut $\ln 2$.

On en déduit que $\sum R_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} R_k = 0 + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} ka_k = \ln 2$.

7) a) $F(n) = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{1}{2t+n} - \dfrac{1}{2t+n+1}\right) dt = \left[\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2t+n}{2t+n+1}\right)\right]_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n}$.

b) En regroupant dans la série alternée les termes deux à deux, on a $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2k+n} - \dfrac{1}{2k+1+n}\right)$.

La fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{2t+n} - \dfrac{1}{2t+1+n} = \dfrac{1}{(2t+n)(2t+1+n)}$ est décroissante.

Donc $F(n) \leq R_n \leq F(n) + \varphi(0)$, où $\varphi(0) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. *Variante* : $F(n) \leq R_n \leq F(n-2)$.

Remarque : Par pincement, on en déduit donc $R_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

8) a) Posons $S_n = \ln P_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(a_n)$.

Comme $\sum(1-a_n)$ converge, alors a fortiori $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Comme $\ln(1+x) \sim x$ en $x=0$ et que $\ln(a_n) = \ln(1+(a_n-1))$, alors $|\ln(a_n)| \sim |1-a_n|$.

Donc par comparaison, $\sum \ln(a_n)$ converge absolument vers un réel λ. Et $\lim_{n\to+\infty} P_n = \exp(\lambda)$.

b) On a $|1-|z|| \leq |1-z|$ par la seconde inégalité triangulaire, c'est-à-dire $|1-\rho| \leq |1-z|$.

On a $|\mathrm{Im}(1-z)| \leq |1-z|$ par Pythagore, c'est-à-dire $|\rho\sin\theta| \leq |1-z|$.

c) On considère $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, avec $\theta_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ car $\mathrm{Re}\, z_n > 0$. On a $P_n = (\prod_{k=0}^{n} \rho_k)\exp(i\sum_{k=0}^{n}\theta_k)$.

On va prouver que $\prod \rho_n$ converge vers un réel non nul ρ et que $\sum_{k=0}^{n} \theta_n$ converge vers un réel θ.

On obtiendra alors (par continuité de exp) le résultat souhaité : $\lim_{n\to+\infty} P_n = \rho e^{i\theta} \neq 0$.

Or, $\prod \rho_n$ vérifie les propriétés du a) : $\rho_n \neq 0$ et $\sum|1-\rho_n|$ converge, car par b), $|1-\rho_n| \leq |1-z_n|$.

D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \rho_n \sin\theta_n = 0$, car par b), $|\rho_n\sin\theta_n| \leq |1-z_n|$.

On a ainsi $\lim_{n\to+\infty} \sin\theta_n = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}\theta_n = 0$ (en effet, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\theta_n = \arcsin(\sin\theta_n)$).

On en déduit que $\theta_n \sim \rho_n\sin\theta_n$. Comme $\sum|\rho_n\sin\theta_n|$ converge, $\sum\theta_n$ converge.absolument.

9) a) Par IPP, on a : $\int_n^p \sin(\pi x)f(x)\ dx = \left[-\dfrac{1}{\pi}\cos(\pi x)f(x)\right]_n^p + \dfrac{1}{\pi}\int_n^p \cos(\pi x)f'(x)\ dx$.

L'intégrale $\int_n^{+\infty} \cos(\pi x)f'(x)\ dx$ converge absolument, car $\int_n^{+\infty} |f'(x)|\ dx = -\int_n^{+\infty} f'(x)\ dx = f(n)$.

On en déduit que $R(n)$ existe et que $R(n) = \dfrac{1}{\pi}f(n) + \dfrac{1}{\pi}\int_n^{+\infty}\cos(\pi x)f'(x)\ dx$.

De plus $|R(n)| \leq \dfrac{1}{\pi}f(n) + \dfrac{1}{\pi}\int_n^{+\infty}|f'(x)|\ dx = \dfrac{2}{\pi}f(n)$. Donc $T_n = O(f(n))$.

b) $R(n) = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k A_k$, avec $A_k = \int_k^{k+1}|\sin(\pi x)|\, f(x)\ dx$.

En effet, la fonction $x \longmapsto \sin(\pi x)$ est positive ou négative sur $[k, k+1]$, selon la parité de k.

On a donc $A_k = \int_0^1 \sin(\pi\theta)f(k+\theta)\ d\theta$.

En utilisant le fait que f est décroissante et converge vers 0, on montre que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit vers 0.

Donc la série $\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k A_k$ vérifie le CSSA et $|R(n)| \leq A_n \leq f(n)\int_n^{n+1}|\sin(\pi x)|\ dx = \dfrac{2}{\pi}f(n)$.

10) a) On a $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(t+1) \leq \dfrac{1}{2^n}f(t)$, donc $u_n \leq \dfrac{1}{2^n}u_0$ en intégrant pour $t \in [0,1]$.

On en déduit par comparaison que $\sum u_n$ converge, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

b) On pose $v_n = \sup_{[n,n+1]} f$. On a $v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}v_n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Pour $n \geq p$ assez grand, $v_n \leq \varepsilon$. Donc $\forall x \geq p$, $f(x) \leq \varepsilon$.