Interrogation n°5. *Barème sur 23.5 pts*

On rappelle que :

- le critère de D'Alembert est au programme officiel

- le critère de Raabe-Duhamel et les séries de Bertrand ne sont pas au programme officiel.

- La convergence absolue est valable dans $\mathbb{C}$: Si $\sum |z_n|$ converge (dans $\mathbb{R}$), alors $\sum z_n$ converge (dans $\mathbb{C}$).

1) a) [2 pts] Soit $\boxed{\alpha > 0}$. Déterminer la nature (cv ou div) de la série $\sum w_n$, où $\boxed{w_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n^{2\alpha}}}$.

b) [2 pts] On pose $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n \ln n}{n^\alpha}\right)$. Déterminer une CNS sur $\alpha > 0$ pour que $\sum u_n$ converge.

2) On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{3/2}}$. *Les questions a) et b) sont indépendantes.*

a) [1 pt] Montrer que la série $\sum (-1)^n R_n$ converge.

b) [1 pt] En minorant R_n, montrer que la série $\sum R_n$ diverge.

3) [1 pt] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que la série $\sum u_n$ converge. La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle nécessairement ?

Si *Vrai*, donner une démonstration ; si *Faux*, donner un contre-exemple.

4) Pour tout réel positif x, on considère $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)$.

a) [1 pt] Justifier que pour tout $x \geq 0$, $f(x)$ est bien défini (c'est-à-dire que la série converge).

b) [1.5 pt] Pour tout $\boxed{p \in \mathbb{N}}$, exprimer $f(p)$ par une somme finie.

En déduire *sans justification* un équivalent simple de $f(p)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

5) On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^3)^n}$.

a) [1 pt] En utilisant une IPP, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$. On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n.$$

b) [2 pts] En considérant $u_n = n^{1/3} I_n$, montrer qu'il existe $\lambda > 0$, tel que $I_n \sim \dfrac{\lambda}{n^{1/3}}$.

Indication : Considérer $\sum (\ln u_{n+1} - \ln u_n)$.

6) On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k}$.

a) [0.5 pt] Exprimer sans justification a_n en fonction de termes de la suite R.

b) Par une transformée d'Abel (*admis ici*), on a $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k a_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n}$.

[1.5 pt] En déduire avec soin que $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \ln 2$.

Remarque : On reconnaîtra une série (vue en cours) dont la somme vaut $\ln 2$ (*admis ici*).

7) [2 pts] On considère $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+n}}$, c'est-à-dire $R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - ...$

a) Calculer $F(n) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2t+n} - \frac{1}{2t+n+1} \right) \, dt$ et en déduire $F(n) \sim \frac{1}{2n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Exprimer *sans justification* R_n comme la somme d'une série *à termes positifs*.

Proposer *sans justification* un encadrement de R_n où intervient $F(n)$.

Utiliser le fait que la fonction $\varphi : t \longmapsto \frac{1}{2t+n} - \frac{1}{2t+n+1} = \frac{1}{(2t+n)(2t+n+1)}$ décroît sur $\mathbb{R}^+$.

8) a) [1 pt] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\sum |1-a_n|$ converge.

On pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ *non nul*.

b) [1 pt] Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe.

Montrer que $|1-\rho| \leq |1-z|$ et que $|\rho \sin\theta| \leq |1-z|$.

c) [1.5 pt] Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\boxed{\operatorname{Re} z_n > 0 \text{ et } \sum |1-z_n| \text{ converge}}$.

On pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} z_k$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre complexe z *non nul*.

Indication : On posera $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

9) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 décroissante et convergeant vers 0.

On considère $R_n = \int_n^{+\infty} f(x) \sin(\pi x) \, dx$.

Les deux questions sont indépendantes.

a) [0.5 pt] Montrer que f' est intégrable.

a) [1 pt] En utilisant une IPP, montrer que $R_n = O(f(n))$.

b) [0.5 pt] Ecrire *sans justification* R_n comme la somme d'une série alternée. Retrouver $R_n = O(f(n))$.

10) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue positive telle que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x+1) \leq \frac{1}{2} f(x)$.

Les deux questions sont indépendantes.

a) [0.5 pt] En considérant $u_n = \int_n^{n+1} f(t) \, dt$, montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) [0.5 pt] Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.