**Interrogation n°4. Corrigé.**

**1)** a) Pour $\alpha > 1$, on a $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$, donc l'intégrale converge.

Pour $\alpha = 1$, avec $u = \ln t$, $\int_e^{+\infty} \dfrac{dt}{t\ln t} = \int_1^{+\infty} \dfrac{du}{u} = [\ln u]_1^{+\infty} = +\infty$.

Pour $\alpha < 1$, alors $\forall t \geq e$, $\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)} \geq \dfrac{1}{t\ln t}$, d'où la divergence. D'où la CNS : $\alpha > 1$.

b) En 1, avec $t = 1+h$, on a $\dfrac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{3/2}} \sim \dfrac{h^\alpha}{h^{5/2}}$. Donc $\int_1^2$ ... converge ssi $\alpha > \frac{3}{2}$.

En $+\infty$, $\dfrac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{3/2}} \sim \dfrac{(\ln t)^\alpha}{t^{5/2}} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc $\int_2^{+\infty}$ ... converge. D'où la CNS : $\alpha > \frac{3}{2}$.

**2)** On a $J(n) = K(n,n)$, avec $K(n,m) = \int_0^1 t^n(\ln t)^m\, dt$.

En intégrant par parties, on a $K(n,m) = \dfrac{-m}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{m-1}\, dt = \dfrac{-m}{n+1}K(n,m-1)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

*Remarque* : En toute rigueur, il faut faire une IPP sur des segments $[\varepsilon, 1]$, puis on fait $\varepsilon \to 0^+$.

Donc $K(n,n) = \dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}K(n,0) = \dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$, car $K(n,0) = \int_0^1 t^n\, dt = \dfrac{1}{n+1}$.

*Variante* : Avec $t = e^{-u}$, on a : $J(n) = (-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)u}u^n\, du = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^1 e^{-y}y^n\, dy = \dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$.

**3)** a) On a par IPP : $\int_1^x \dfrac{\cos t}{t^\alpha}\, dt = \left[\dfrac{\sin t}{t^\alpha}\right]_1^x - \alpha\int_1^x \dfrac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\, dt$.

Or, $\dfrac{\sin t}{t^{\alpha+1}} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ et $(\alpha+1) > 1$, donc $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable (par comparaison).

Donc $J(\alpha)$ existe et vaut $\sin 1 - \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t^{\alpha+1}}\, dt$.

b) Pour $K(\beta)$, on utilise le changement de variable $u = t^\beta$, c'est-à-dire $t = u^{1/\beta}$ et $dt = \dfrac{1}{\beta}u^{1/\beta-1}$.

D'où $\int_1^x \cos(t^\beta)\, dt = \dfrac{1}{\beta}\int_1^{x^\beta} \dfrac{\cos(u)}{u^{1-1/\beta}}\, du$ qui tend vers $\dfrac{1}{\beta}J(\alpha)$ lorsque $x \to +\infty$, avec $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\beta} > 0$.

Donc $K(\beta)$ converge.

**4)** a) On a $0 \leq G(x) \leq \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{x\sqrt{t}}\, dt = \dfrac{1}{x}F(x)$, donc $G(x) = o_{+\infty}(F(x))$.

b) Par intégration par parties, $F(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}G(x)$, et comme $G(x) = o_{+\infty}(F(x))$, alors $F(x) \sim_{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

c) Avec le changement de variable $t = \sqrt{u}$, on a $R(x) = \dfrac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \dfrac{1}{2}F(x^2)$.

Donc $R(x) \sim_{+\infty} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

*Remarque* : On pourrait aussi faire directement une IPP sur $R(x)$ en considérant la décomposition

$$e^{-x^2} = \frac{1}{2x} \times (2xe^{-x^2}) = \frac{-1}{2x} \times (e^{-x^2})'$$

**5)** a) En $t = 0^+$, on a $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$, donc $I(x)$ existe ssi $x - 1 > -1$, c'est-à-dire $x > 0$.

b) On sait par convexité de exp que $e^u \leq 1 + u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Donc $\forall t \in [0,1]$, $1 - t \leq e^{-t}$.

Par ailleurs, $e^{-t} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

Ainsi, $\forall t \in ]0,1]$, $t^{x-1} - t^x \leq t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$, donc $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \leq I(x) \leq \dfrac{1}{x}$, d'où $I(x) \sim \dfrac{1}{x}$ en $x = 0^+$.

**6)** On a $f_n(y) \leq f(y) = 0 = f_n(x_n)$, donc $y \leq x_n$.

Soit $\varepsilon > 0$ (et de sorte que $y + \varepsilon \in I$). Il reste à prouver que $x_n \leq y + \varepsilon$ pour $n$ assez grand.

Or, $\lim_{n\to+\infty} f_n(y+\varepsilon) = f(y+\varepsilon) > 0$, donc $f_n(y+\varepsilon) > 0$ pour $n$ assez grand.

On en déduit que $x_n \leq y + \varepsilon$ pour $n$ assez grand.

b) Ici, $f_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n - 2$ et $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - 2$ définies sur $[0,1[$ (en prenant $n \geq 2$).

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$, où $f(y) = 0$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{2}$.

**7)** a) $R(x) = K - \int_0^x f(t)dt$. Par le th fondamental, $R$ est de classe $C^1$ et $R'(x) = -f(x)$.

b) L'application $R$ est strictement decroissante et est une bijection de classe $C^1$ de $[0,+\infty[$ sur $]0,K]$.

On effectue le changement de variable $u = R(t)$. On a $du = -f(t)\ dt$.

Donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)\ dt}{R(t)^\alpha} = \int_0^K \dfrac{du}{u^\alpha}$ qui converge ssi $\alpha < 1$.

c) On a $|R(x)| \leq \int_x^{+\infty} \left|\dfrac{g(t)}{t}\right|\ dt \leq \dfrac{1}{x}\int_x^{+\infty} |g(t)|\ dt$o$_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ car $g$ intégrable.

On a par IPP, $\int_0^x R(t)\ dt = [tR(t)]_0^x - \int_0^x tR'(t)\ dt = xR(x) + \int_0^x tf(t)\ dt = xR(x) + \int_0^x g(t)\ dt$.

En faisant tendre $x$ vers $+\infty$, on obtient bien : $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x R(t)\ dt$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} g(x)\ dx$.

**8)** a) En $0^+$, $\dfrac{1}{e^{\sqrt{t}} - 1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ (car $e^x - 1 \sim x$) et en $+\infty$, $\dfrac{1}{e^{\sqrt{t}} - 1} \sim e^{-\sqrt{t}} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc l'intégrale converge.

b) On a $\int \dfrac{\sin(t)\ln(t)}{t}\ du = -\cos(t)\dfrac{\ln(t)}{t} - \int \dfrac{\cos(t)\ln(t)}{t^2}\ dt + \int \dfrac{\cos(t)}{t^2}\ dt$.

Les fonctions $\dfrac{\cos(t)\ln(t)}{t^2}$ et $\dfrac{\cos(t)}{t^2}$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$, car en $O_{+\infty}(\dfrac{1}{t^{3/2}})$.

Et $\cos(t)\dfrac{\ln(t)}{t}$ converge bien en $+\infty$ (vers 0). Donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(t)\ln(t)}{t}\ dt$ existe.

D'autre part, lorsque $t$ tend vers $0^+$, $\dfrac{\sin(t)\ln(t)}{t} = O(\ln t)$, donc $O\left(\dfrac{1}{t^{1/2}}\right)$ donc est intégrable sur $]0,1]$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)\ln(t)}{t}\ dt$ existe.

**9)** a) Avec $x = \tan t$, on a $(\sin t)^2 = 1 - (\cos)^2 = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

D'où $I(a) = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1 + a(\sin t)^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1 + ax^2/(1+x^2)} \dfrac{dx}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + (1+a)x^2} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$.

En effet, $\int \dfrac{dx}{1+(1+a)x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{a+1}} \int \dfrac{\sqrt{a+1}\ dx}{1+(1+a)x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{a+1}} \int \dfrac{dy}{1+y^2}$, avec $y = \sqrt{a+1}\ x$.

b) $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{dt}{1 + t^4(\sin t)^2} \leq \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \dfrac{dt}{1+(n\pi)^4(\sin t)^2} = \int_0^\pi \dfrac{dt}{1+(n\pi)^4(\sin t)^2}$, car $\sin^2$ est $\pi$-périodique.

Comme $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, alors $u_n \leq 2\int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1+(n\pi)^4(\sin t)^2}$.

Par a), on a donc $u_n \leq \dfrac{\pi}{\sqrt{(n\pi)^4 + 1}}$, et ainsi $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc $\sum u_n$ converge et l'intégrale converge.