Interrogation n°4. *Barème sur 24 pts*

Remarque pratique : Lorsque l'existence des limites est évidente, on pourra utiliser directement les intégrations par parties sur des intervalles quelconques.

1) *On rappelle que les intégrales dites de Bertrand ne sont pas supposées connues (car hors-programme officiel).*

a) [2.5 pts] Donner une CNS sur le réel α pour que l'intégrale $I = \int_e^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha (\ln t)}$ converge.

Remarque : Le fait que ln soit au dénominateur simplifie les preuves par rapport au cas général.

b) [2 pts] Donner une CNS sur le réel α pour que l'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \dfrac{(\ln t)^\alpha}{(t-1)^{5/2}}\, dt$ converge.

2) [2 pts] Calculer la valeur de $J(n) = \int_0^1 t^n\ (\ln t)^n\, dt$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Il n'est pas demandé de justifier l'existence des intégrales considérées.

3) [2.5 pts] Soient des réels $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

a) Démontrer la convergence de l'intégrale $J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^\alpha}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \dfrac{\cos t}{t^\alpha}\, dt.$

b) En utilisant a), démontrer la convergence de $K(\beta) = \int_1^{+\infty} \cos\left(t^\beta\right)\, dt.$

4) On considère les fonctions F et G définies sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$ et $G(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^{3/2}}\, dt.$

a) [1 pt] Montrer (à l'aide d'une majoration simple) que $G(x) = o_{+\infty}(F(x))$.

b) [1 pt] Démontrer que $F(x) \sim \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) [1 pt] En déduire un équivalent de $R(x) = \int_x^{+\infty} \exp(-t^2)\, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5) a) [0.5 pt] Déterminer une CNS sur le réel x pour qu'existe l'intégrale $I(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt.$

b) [1 pt] Justifier $\forall t \in [0,1],\ 1 - t \leq e^{-t} \leq 1$. En déduire un équivalent de $I(x)$ en $x = 0^+$.

6) a) [1.5 pt] Soient f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions continues définies sur un même intervalle I. On suppose que :

- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers f, c'est-à-dire $\forall x \in I,\ f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

- les fonctions f_n et f sont strictement croissantes sur I et admettent chacune un *unique* zéro.

On note x_n l'unique zéro de f_n et on note y l'unique zéro de f.

Montrer que $y \leq x_n$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $x_n \leq y + \varepsilon$ pour n assez grand.

b) [1 pt] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique réel positif vérifiant l'équation $(E_n) : 1 + x + x^2 + ... + x^n = 2$.

Donner *sans justification* la valeur de $L = \lim_{n\to+\infty} x_n$.

7) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et strictement positive. On suppose que $K = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

On pose $\forall x \in [0, +\infty[$, $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\, dt$. *Les questions b) et c) sont indépendantes.*

a) [1 pt] Montrer que R est de classe C^1 et calculer $R'(x)$.

b) [1 pt] On suppose ici f strictement positive. Ainsi, R est à valeurs strictement positives.

En utilisant a), montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{R(t)^\alpha}\, dt$ converge ssi $\alpha < 1$.

c) [1.5 pt] On suppose $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, avec g intégrable.

Montrer que $R(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} R(x)\, dx$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$.

8) *Les deux questions sont indépendantes.*

a) [1 pt] Etudier la convergence de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{e^{\sqrt{t}} - 1}\, dt$.

b) [1.5 pt] Démontrer l'existence (dans $\mathbb{R}$) de $L = \lim_{x \to +\infty} \int_{1/x}^{x} \dfrac{\sin(t)\ln(t)}{t}\, dt$.

9) *Exemple de fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ de classe C^∞ ne convergeant pas vers 0 en $+\infty$.*

a) [1 pt] Pour $a > 0$, on pose $I(a) = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1 + a(\sin t)^2}\, dt$. Avec $u = \tan t$, montrer que $I(a) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$.

b) [0.5 pt] Montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1 + t^4(\sin t)^2}$ converge.

Indication : On utilisera sans justification : $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{dt}{1 + t^4(\sin t)^2} \leq 2 \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2} \dfrac{dt}{1 + (n\pi)^4(\sin t)^2}$.