Interrogation n°3. Corrigé

1) a) On a : $\dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{x}{x+x^2/2+x^3/6+\mathfrak{o}\,(x^3)} = \dfrac{1}{1+u}$, avec $u = 1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\mathfrak{o}\,(x^2)$.

Or, $\dfrac{1}{1+u} = 1-u+u^2+\mathfrak{o}\,(u^2) = 1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^2}{4}+\mathfrak{o}\,(x^2)$.

Donc $\dfrac{x}{e^x-1} = 1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}+\mathfrak{o}\,(x^2)$.

b) Avec $x = 1+h$, on a $1+x+x^2+x^3 = 4+(1+2+3)h+\mathfrak{o}\,(h) = 4+6h+\mathfrak{o}\,(h)$.

Donc $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\left(1-\dfrac{3}{2}h+\mathfrak{o}\,(h)\right)\right)$.

Mais, par Taylor-Young, $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+u\right) = 1+2u+\mathfrak{o}\,(u)$, car $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\tan'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1+1 = 2$.

Donc $f(x) = 1-2\dfrac{3\pi}{8}h+\mathfrak{o}\,(h) = 1-\dfrac{3\pi}{4}h+\mathfrak{o}\,(h) = 1-\dfrac{3\pi}{4}(x-1)+\mathfrak{o}_1(x-1)$.

2) $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = n\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\dfrac{1}{2n}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $u_n = \exp\left(1-\dfrac{1}{2n}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = e\exp\left(-\dfrac{1}{2n}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = e-\dfrac{e}{2n}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc $e-u_n \sim \dfrac{e}{2n}$.

3) On pose $g(x) = xf(x)$. On a donc $a_{n+1} = g(a_n)$.

a) Comme f strictement positive et décroissante, on a $0 < f(x) < f(0) = 1$ pour tout $x > 0$.

Donc $0 < g(x) < x$ pour tout $x > 0$. Ainsi, sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui est stable par g, on a $g < \mathrm{Id}$.

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée par 0, elle converge vers $L \geq 0$.

Comme g est continue, on a $g(L) = L$, donc $L = 0$.

b) Posons $\lambda = -f'(0)$. On a donc $\lambda > 0$. On a $\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{x} = \dfrac{1-f(x)}{xf(x)} \sim \dfrac{-f'(0)x}{x} = \lambda$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n} = \lambda$. Par Cesàro, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_0}\right) = \lambda$. Donc $a_n \sim \dfrac{1}{\lambda n}$.

Comme la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, on en déduit par comparaison que $\sum a_n$ diverge.

4) a) On a $P_n(1) > 0 > P_n(0)$, donc $x_n \in [0,1]$.

Remarque : Pour prouver que x_n existe et est unique :

On a $P_n'(x) = 3x^2+2nx > 0$ sur $]0,+\infty[$. D'autre part, $P_n(0) = -n$ et $\lim_{+\infty} P_n = +\infty$.

Donc P_n est une bijection continue strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[-n,+\infty[$.

b) Soit $0 < a < 1$. On a $P_n(1) = 1$ et $P_n(a) = a^3+n(a^2-1) \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Donc pour n assez grand, $P_n(a) < 0$, et comme $P_n(1) > 0$, alors $a < x_n < 1$ pour n assez grand.

Comme a peut être pris arbitrairement proche de 1, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1^-$.

c) On pose $x_n = 1+\varepsilon_n$. On a $n\varepsilon_n(2+\varepsilon_n) = -(1+\varepsilon_n)^3$, donc $2n\varepsilon_n \sim -1$, c'est-à-dire $\varepsilon_n = \frac{-1}{2n}$.

Ainsi, $x_n = 1-\frac{1}{2n}+\mathfrak{o}\,(\frac{1}{n})$.

5) a) $R_n(x) = \int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\ f^{(n+1)}(t)\ dt$.

Remarque : On obtient $R_n(x)$ par IPP successives à partir de $f(x) = f(a)+\int_0^x f'(t)\ dt$.

b) $|R_n(x)| \leq \int_0^x \left|\dfrac{(x-t)^n}{n!}\right|\ \left|f^{(n+1)}(t)\right|\ dt \leq M\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\ dt = M\int_0^x \dfrac{u^n}{n!}\ du = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Remarque : pour traiter le cas $x<0$, on utilise de même : $|R_n(x)| \leq \int_x^0 \dfrac{(t-x)^n}{n!} \ \left|f^{(n+1)}(t)\right| \ dt.$

On pourrait aussi utiliser la notation $[0,x]$ qui désigne $[0,x]$ si $x \geq 0$, et $[x,0]$ si $x<0$:
Comme $t \longmapsto (x-t)$ est de signe constant sur $[0,x]$, alors $\int_{[0,x]} \left|\dfrac{(x-t)^n}{n!}\right| \ dt = \left|\int_{[0,x]} \dfrac{(x-t)^n}{n!} \ dt\right| = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Remarque : On pourrait aussi déduire le cas $x<0$ du cas $x>0$ en considérant $f(x) = g(-x)$.

6) a) La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, car $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$.
On en déduit que pour tous u et $v>0$, on a $\ln\left(\dfrac{1}{\alpha}u^\alpha + \dfrac{1}{\beta}v^\beta\right) \geq \dfrac{1}{\alpha}\ln(u^\alpha) + \dfrac{1}{\beta}\ln(v^\beta) = \ln(uv)$.
En composant par exp croissante, on obtient donc $uv \leq \dfrac{1}{\alpha}u^\alpha + \dfrac{1}{\beta}v^\beta$.
L'inégalité est par ailleurs immédiate lorsque u ou v est nul.

b) On prend $\alpha = 3$ et on choisit β tel que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$, c'est-à-dire $\beta = \dfrac{3}{2} > 1$.
Par a), $\dfrac{a_n}{n} \leq \dfrac{1}{\alpha}(a_n)^\alpha + \dfrac{1}{\beta}\dfrac{1}{n^\beta}$. Par hypothèse, $\sum (a_n)^\alpha$ converge. Par Riemann, $\sum \dfrac{1}{n^\beta}$ converge.
Par comparaison entre séries à termes positifs, $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

7) a) $G(x)$ est bien définie car $[x,x^2]$ est inclus dans $]1,+\infty[$, intervalle où f est bien continue.

b) On note F une primitive de f sur $]1,+\infty[$. Ainsi, F est de classe C^1 comme primitive d'une fonction C^1.

On a donc $G(x) = F(x^2) - F(x)$.

Ainsi, G est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$, et $G'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

c) Posons $t = 1+h$. On a $\dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1} = \dfrac{h - \ln(1+h)}{h\ln(1+h)} \sim \dfrac{h^2/2}{h^2} = \dfrac{1}{2}$. Donc $L = \dfrac{1}{2}$.

d) Pour $1 < x \leq \sqrt{\alpha}$, on a $[x,x^2] \subset]1,\alpha]$.
Donc $\left|G(x) - \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{t-1}\right| \leq \int_x^{x^2} \left|\dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1}\right| \ dt \leq \int_x^{x^2} 1 \ dt = x^2 - x$, qui tend vers 0 lorsque $x \to 1^-$
D'autre part, $\int_x^{x^2} \dfrac{dt}{t-1} = \int_x^{x^2} \ln(t-1) \ dt = \ln(x+1)$, qui tend vers $\ln 2$ lorsque $x \to 1^-$
On en conclut que $G(x)$ converge vers $\ln 2$ lorsque $x \to 1^-$.

e) On prolonge G par continuité en 1 par $G(1) = \ln 2$. Par b), on a $\lim_{x\to 1, x>1} G'(x) = 1$, car $\ln x \sim_1 (x-1)$. Par le th du prolongement C^1, G est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, et $G'(1) = 1$.

f) Par une IPP, on a $G(x) = \left[\dfrac{t}{\ln t}\right]_x^{x^2} + \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{(\ln t)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{2\ln x} + \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{(\ln t)^2}$.
Or, $\int_x^{x^2} \dfrac{dt}{(\ln t)^2} \leq \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{(\ln x)^2} = \dfrac{x^2}{(\ln x)^2}$, donc $G(x) = \dfrac{x^2}{2\ln x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{x^2}{\ln x}\right)$. Donc $G(x) \sim_{+\infty} \dfrac{x^2}{2\ln x}$.

8) a) Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, $|a_n| \leq \varepsilon \ 2^n$.

Donc $\forall n \geq p$, $|A_n| \leq \sum_{k=0}^p |a_k| + \varepsilon \sum_{k=p+1}^n 2^k$, et $\sum_{k=p+1}^n 2^k \leq \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1}$.

Pour $n \geq q$ assez grand, $\sum_{k=0}^p |a_k| \leq \varepsilon \ 2^n$, car $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

Donc $\forall n \geq \max(p,q)$, $|A_n| \leq 3\varepsilon \ 2^n$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $A_n = o_{+\infty}(2^n)$.

b) On applique a) avec $a_n = b_n - 2^n$.

On a donc $a_n = o\,(2^n)$, donc $A_n = o\,(2^n)$, donc $B_n = \sum_{k=0}^n 2^k + o\,(2^n) = 2^{n+1} + o\,(2^n)$.

On en déduit $B_n \sim 2^{n+1}$ lorsque $n \to +\infty$.