Interrogation n°3. *Barème sur 24 pts.*

1) *Les questions sont indépendantes*

a) [1.5 pt] Déterminer le DL $\boxed{\text{à l'ordre 2}}$ en $x = 0$ de $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

b) [1.5 pt] Déterminer le DL à l'ordre 1 en $\boxed{x = 1}$ de $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{1 + x + x^2 + x^3}\right)$.

Remarque : On pourra utiliser la formule de Taylor-Young appliquée à la fonction tan.

2) [2 pts] On pose $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

On sait que $\lim_{n \to +\infty} u_n = e$. Déterminer un équivalent de $e - u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

3) (*oral X*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement positive, de classe C^1, telle que $f(0) = 1$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n f(a_n)$.

a) [1.5 pt] Montrer brièvement que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0^+.

b) [2 pts] Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\right)$. En déduire avec Cesàro (*sans détailler*) que $\sum a_n$ diverge.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $\boxed{P_n(x) = x^3 + n(x^2 - 1)}$.

On *admet* que P_n admet une unique racine réelle positive, qu'on note x_n.

a) [0.5 pt] Justifier (par un argument simple sans étude de fonction !) que $x_n \in [0, 1]$.

b) [1 pt] Montrer que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1^-$. *Suggestion* : Considérer $P_n(1)$ et $P_n(a)$, où $0 < a < 1$.

c) [2 pts] Déterminer un DL de x_n de la forme $x_n = 1 + \dfrac{\lambda}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On fixe $x \in \mathbb{R}$.

a) [1 pt] Exprimer *sans justification* $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ sous forme d'une intégrale.

Remarque : Il s'agit de la célèbre formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

b) [1 pt] On suppose ici $x \geq 0$.

Déduire de a) l'inégalité de Taylor-Lagrange : $|R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} M$, où $M = \sup_{[0,x]} \left|f^{(n+1)}\right|$.

6) Soient des réels α et $\beta > 1$ tels que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

a) [1.5 pt] Justifier que ln est concave, c'est-à-dire $-\ln$ est convexe.

En déduire que $uv \leq \dfrac{1}{\alpha} u^\alpha + \dfrac{1}{\beta} v^\beta$ pour tous réels positifs u et v.

b) [1 pt] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On suppose que la série $\sum (a_n)^3$ converge.

En utilisant a) et les séries de Riemann, montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

7) On considère pour tout réel $\boxed{x>1}$,, $G(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$.

Remarque : Pour la suite, on pose $\forall t > 1$, $f(t) = \dfrac{1}{\ln t}$, et on note F une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

a) [0.5 pt] Justifier que l'intégrale définissant $G(x)$ est bien définie pour tout $x > 1$.

b) [1 pt] Montrer que G est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x > 1$, $G'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

c) [1 pt] Déterminer $L = \lim_{t \to 1, t>1} \left(\dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1} \right)$.

On en déduit (admis ici) qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]1, \alpha]$, $\left| \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1} \right| \leq 1$.

d) [1.5 pt] (★) En utilisant c), montrer que $\lim_{x \to 1, x>1} G(x) = \ln 2$.

e) [1 pt] Montrer que G admet un prolongement de classe C^1 en $x = 1$.

f) *Question supplémentaire hors-interrogation*

En utilisant une IPP et une majoration du reste, déterminer un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

8) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $a_n = \mathfrak{o}(2^n)$. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

a) [1.5 pt] Montrer que $A_n = \mathfrak{o}(2^n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : Utiliser une preuve de type Cesàro.

b) [1 pt] Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $b_n \sim 2^n$. On pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

En utilisant a), déterminer un équivalent (simple) de B_n lorsque n tend vers $+\infty$.