Interrogation n°2. Corrigé

1) On fait tendre ε vers 0^+. Par passage à la limite des inégalités larges, on a $x \leq y$.

Variante : Par l'absurde : si $x > y$, il suffit de choisir $0 < \varepsilon < y - x$ pour obtenir une contradiction.

Remarque : En analyse, il arrive qu'on se serve de cette propriété qui permet de prouver $x \leq y$ en prouvant l'inégalité à ε près $x \leq y + \varepsilon$ pour *tout* $\varepsilon > 0$.

2) On approche x par un multiple de λ^n : On a $x = \lim_{n\to+\infty} \left\lfloor \dfrac{x}{\lambda^n} \right\rfloor \lambda^n$, car $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = 0^+$.

3) a) On vérifie aisément que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(x+n) = f(x)$. Or, tout réel x s'écrit $x = r + n$, où $r \in [0,1[$.
Ainsi, $f(\mathbb{R}) = f([0,1[)$. Comme $[0,1[\subset [0,1] \subset \mathbb{R}$, alors $f(\mathbb{R}) = f([0,1])$.
Or, par continuité, $f([0,1])$ est un segment. Donc f est bien bornée et atteint ses bornes.

b) On a $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $f(x + n + m\sqrt{2}) = f(x)$. Ainsi, $\forall a \in A$, $f(a) = f(0)$.
Comme A est dense, tout réel x est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.
Donc par continuité de f, on a $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(0)$. Ainsi, f est constante.

4) Par le TAF, toute pente est une dérivée, donc $D \subset \Delta$.
Par définition, toute dérivée est une limite de pentes, donc $\Delta \subset \overline{D}$.

Exemple : Avec $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$, on a $\Delta = [0,2]$ et $D =]0,2[$.

5) a) On a $f'(0) > 0$. Par continuité de f' en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,\alpha]$, $f'(x) > 0$.
Donc f est continue et strictement croissante sur $[0,\alpha]$, et ainsi induit une bijection de $[0,\alpha]$ sur $[f(0), f(\alpha)] = [0,\beta]$.

b) $\Delta_\varepsilon = [0, f^{-1}(\varepsilon)]$. Comme f est une bijection dérivable et $f'(0) \neq 0$, alors $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(0)}$.
D'où $\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \dfrac{l(\Delta_\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \dfrac{f^{-1}(\varepsilon)}{\varepsilon} = (f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{\lambda}$.

6) a) Comme $f(x) \sim \lambda x$, alors $f(x) > 0$ sur un voisinage $]0,\alpha]$ de 0 relativement à $[0,1]$.

b) On considère alors $a = \inf A$, où $A = \{x \in [\alpha, 1] \mid f(x) = 0\}$ partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.
Comme a est adhérent à A, alors $a \in [\alpha, 1]$ et est un zéro de f comme limite de zéros.
Ainsi, $f(a) = 0$. Par définition, on a $\forall x \in [\alpha, a[$, $f(x) \neq 0$.
Par a), on obtient donc $\forall x \in]0,a[$, $f(x) \neq 0$.
Par le TVI, f est de signe constant sur $]0,a[$. Donc, avec a), on obtient bien $\forall x \in]0,a[$, $f(x) > 0$.

7) On considère $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour tout $0 < x \leq 1$, prolongée par continuité en 0 par $g(0) = f'(0)$.
Ainsi, g est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée (et atteint ses bornes).
On conclut en posant $K = \sup_{[0,1]} |g|$.

8) Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq M+1$.
Donc $\forall n \geq n_0$, $v_n \geq \dfrac{A}{n} + \dfrac{n - n_0}{n}(M+1)$, où $A = u_1 + ... + u_{n_0}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{A}{n} + \dfrac{n-n_0}{n}(M+1) = M + 1 > M$, alors ce terme est $> M$ pour $n \geq n_1$ assez grand.
Donc $v_n \geq M$ pour tout entier $n \geq \max(n_0, n_1)$. Comme M est arbitraire, on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

9) a) On pose $Y = |f(X) - f(0)|$ et $A = (|X| \leq \alpha)$. Comme $1 = 1_A + 1_{\overline{A}}$, on a $Y = Y.1_A + Y.1_{\overline{A}}$.

Ainsi, $Y \leq \varepsilon \times 1_A + 2M \times 1_{\overline{A}}$ et donc par linéarité de croissance de l'espérance, on obtient :

$$E(Y) \leq \varepsilon \times P(A) + M \times P(\overline{A}) \leq \varepsilon + M \times P(|X| \geq \alpha)$$

b) On a $|E(f(X_n)) - f(0)| = |E(f(X_n) - f(0))| \leq E(Y_n)$ par inégalité triangulaire, où $Y_n = |f(X_n) - f(0)|$.

Par a), $E(Y_n) \leq \varepsilon + M \times P(|X_n| \geq \alpha)$.

Par hypothèse, on a $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n| \geq \alpha) = 0$, donc $M \times P(|X_n| \geq \alpha) \leq \varepsilon$ pour n assez grand.

Donc $|E(f(X_n)) - f(0)| \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand. Comme ε est arbitraire, $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(0)$.

c) On utilise l'inégalité de Markov (on pourrait utiliser Bienaymé-Tchebychev si $E(X_n) = 0$).

On a $P(|X_n| \geq \alpha) = P(X_n^2 \geq \alpha^2) \leq \dfrac{E(X_n^2)}{\alpha^2} = \dfrac{E(X_n)^2 + V(X_n)}{\alpha^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Remarque :

Lorsque f est k-lipschitzienne, il y a sous cette hypothèse une preuve plus simple que celle du b) :

On a en effet $E(|f(X_n) - f(0)|) \leq kE(|X_n|) \leq kE(X_n^2)^{1/2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

10) On a $\Delta(a,c) = \dfrac{f(c) - f(b) + f(b) - f(a)}{c-a} = \dfrac{c-b}{c-a}\,\Delta(b,c) + \dfrac{b-a}{c-a}\,\Delta(a,b)$.

On a $\dfrac{c-b}{c-a} > 0$, $\dfrac{b-a}{c-a} > 0$ et la somme des deux termes vaut 1. D'où le résultat.

11) a) Soient P et $Q \in \Delta$. Soit $\lambda \in [0,1]$. Posons $R = \lambda P + (1-\lambda)Q$.

On a $f(R) \leq |\lambda|\, f(P) + |1-\lambda|\, f(Q) = \lambda m + (1-\lambda)m = m$.

D'autre part, R est unitaire de degré n, car P et Q le sont et que $\lambda + (1-\lambda) = 1$.

Donc $R \in E_n$ et on a ainsi $f(R) \geq m$ par définition de m.

On en déduit que $f(R) = m$, et ainsi $R \in \Delta$. Donc Δ est convexe.

b) Comme Δ n'est pas vide, il existe $P(X) \in \Delta$.

On remarque que $P(-X)$ appartient à Δ, car n est pair et que $\int_{-1}^{+1} P(t)\, dt = \int_{-1}^{+1} P(-t)\, dt$

Comme Δ est convexe, le polynôme $R = \frac{1}{2}P(X) + \frac{1}{2}P(-X)$ appartient à Δ et est bien un polynôme pair.

12) λ existe car Δ est non vide (car $0 \in \Delta$) et majorée par 1.

- Montrons $f(\lambda) \geq \lambda$. Comme f est croissante, $\lim_{x\to\lambda, x<\lambda} f \leq f(\lambda)$.

Si $\lambda \in \Delta$, on a $f(\lambda) \geq \lambda$ par définition de Δ.

Sinon, on a $\lambda > 0$ et il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Δ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lambda$.

Comme $f(x_n) \geq \lambda_n$, alors par passage à la limite, $\lim_{x\to\lambda, x<\lambda} f \geq \lambda$, donc a fortiori, $f(\lambda) \geq \lambda$.

- Montrons $f(\lambda) \leq \lambda$. Comme f est croissante, $f(\lambda) \leq \lim_{x\to\lambda, x>\lambda} f$.

Si $\lambda = 1$, la propriété $f(\lambda) \leq \lambda$ est immédiate.

Sinon, on a $\lambda < 1$ et $\forall x \in]\lambda, 1[$, $f(x) < x$. En faisant tendre $x \to \lambda^-$, $\lim_{x\to\lambda, x>\lambda} f \leq \lambda$, donc $f(\lambda) \leq \lambda$.