Interrogation n°2. *Barème sur 23.5 pts.*

1) [1 pt] Soient des réels x et y tels que $\forall \varepsilon > 0$, $x \leq y + \varepsilon$. A-t-on nécessairement $x \leq y$?

2) [1 pt] Soit deux réels $0 < \lambda < 1$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $A = \{k\lambda^n,\ (k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$.

Expliciter *sans justification* une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x.

3) [2.5 pts] On sait que $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

a) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+1)$. Montrer (brièvement) que f est bornée et atteint ses bornes.

b) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$. Montrer (brièvement) que f est constante.

4) [1 pt] Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On pose $\Delta = f'(I)$ et $D = \left\{ \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y},\ x < y \text{ et } (x,y) \in I^2 \right\}$ l'ensemble des pentes.

Montrer que $D \subset \Delta \subset \overline{D}$.

5) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\boxed{\lambda = f'(0) > 0}$.

a) [1.5 pt] Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f induit une bijection de $[0, \alpha]$ sur $[0, \beta]$, où $\beta = f(\alpha)$.

Autrement dit, il faut justifier l'existence de α telle que $f : [0, \alpha] \to [0, \beta]$ soit bijective.

b) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\Delta_\varepsilon = \{x \in [0, \alpha] \mid f(x) \leq \varepsilon\}$. On note $l(\Delta_\varepsilon)$ est la longueur de Δ_ε.

Déterminer $\lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \dfrac{l(\Delta_\varepsilon)}{\varepsilon}$. On pourra utiliser le cours de première année sur les bijections réciproques.

6) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable en 0, vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) > 0$. On pose $\lambda = f'(0)$.

a) [1 pt] Donner *sans justification* un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ telle que f ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, \alpha]$.

b) [2 pts] Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$ et $\forall x \in]0, a[$, $f(x) > 0$.

7) [2.5 pts] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. On pose $\lambda = f'(0)$.

Montrer qu'il existe une constante K telle que $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq Kx$.

8) [2.5 pts] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$.

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.

Indication : Pour $M \in \mathbb{R}$, considérer les inégalités $u_n \geq M + 1$.

9) [1 pt] Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle réel I. Soient $a < b < c$ dans I.

Pour $x < y$ dans I, on pose $\Delta(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Montrer que $\Delta(a,c)$ est une valeur moyenne (pondérée) de $\Delta(a,b)$ et $\Delta(b,c)$.

10) Pour tout polynôme P réel, on pose $f(P) = \int_{-1}^{1} |P(t)| \ dt$.

On remarque (*admis ici*) que pour tout λ réel, $f(\lambda P) = |\lambda| f(P)$ et $f(P+Q) \leq f(P) + f(Q)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère E_n l'ensemble des polynômes P réels, unitaires et de degré n.

On pose $m = \inf\{f(P),\ P \in E_n\}$.

a) [2 pts] On note $\Delta = \{P \in E_n \mid f(P) = m\}$. Montrer que Δ est une partie convexe de $\mathbb{R}[X]$.

b) [1.5 pt] (★) On *admet* que Δ n'est pas vide, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $P(X) \in \Delta$.

On suppose que n est pair. Montrer que Δ contient nécessairement un polynôme pair.

11) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles telles que

$$\forall \alpha > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(|X_n| > \alpha) = 0$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On pose $M = \sup |f|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [-\alpha, \alpha],\ \ |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$.

a) [1 pt] Soit X une variable aléatoire réelle. On considère la variable aléatoire $Y = |f(X) - f(0)|$.

On note A l'événement $(|X| > \alpha)$. En utilisant $1 = 1_A + 1_{\overline{A}}$, montrer que $E(Y) \leq \varepsilon + 2M \times P(|X| > \alpha)$.

b) [1.5 pt] Montrer que $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(0)$.

c) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de de variables aléatoires vérifiant $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$.

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété précédente : $\forall \alpha > 0,\quad \lim_{n\to+\infty} P(|X_n| \geq \alpha) = 0$.

12) [1.5 pt] (*extrait écrit X 2022*) (★) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante.

On pose $\lambda = \sup \Delta$, où $\Delta = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$.

En utilisant les limites à gauche et à droite, montrer que $f(\lambda) = \lambda$.