Interrogation n°12. *Barème sur 24 pts*

1) [1.5 pt] Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes, et de même loi.

Calculer $\mathrm{Cov}(XY, Z)$ et $\mathrm{Cov}(XY, XZ)$ en fonction de $E(X)$ et $E(X^2)$ supposés exister.

2) [3 pts] On considère n paires distinctes de chaussettes mélangées dans un tiroir.

On numérote les paires de 1 à n.

On tire aléatoirement n chaussettes, soit exactement la moitié des chaussettes présentes.

a) Déterminer la probabilité p pour que les deux chaussettes de la paire numéro 1 aient été tirées.

b) On note N le nombre de paires complètes dans le lot tiré. Calculer $E(N)$.

3) Soient des v.a. entières N et Z_n, avec $n \in \mathbb{N}$, mutuellement indépendantes.

On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire $P(N = n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

On suppose que les Z_n suivent une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 \leq p \leq 1$. On pose $q = 1 - p$.

On considère $X = \sum_{i=1}^{N} Z_i$ et $Y = N - X$.

a) [1.5 pt] Montrer que X est une variable aléatoire.

Remarque : On sait par le cours que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ est une v.a.

b) [1.5 pt] Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{n!} e^{-p\lambda}$$

On pourra faire intervenir $m = n - k$.

c) [1.5 pt] En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre $\mathcal{P}(\lambda p)$.

d) [1 pt] Déterminer sans calcul la loi de Y.

e) *Question hors-interrogation* : Montrer que X et Y sont indépendantes.

4) [2 pts] Soient X et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ deux v.a. à valeurs entières, indépendantes et de même loi.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X = n) = P(Y = n)$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

En évaluant de deux façons $P(X > Y)$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R_n = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2\right)$$

5) a) [1.5 pt] Soit X une variable.aléatoire réelle de moment d'ordre 2 fini. On pose $\mu = E(X)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer $E((X - \lambda)^2)$ en fonction de $V(X)$ et de $\delta = \mu - \lambda$.

b) [1.5 pt] Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de moments d'ordre 2 finis.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n = E(X_n)$. On suppose $\lim_{n \to +\infty} \mu_n = \lambda$ et $\lim_{n \to +\infty} V(X_n) = 0$.

En utilisant a), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - \lambda| \geq \varepsilon) = 0$.

6) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes (mais de paramètre variable).

On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}}$. On pose $N = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\} \in \mathbb{N}^* \bigcup\{+\infty\}$.

a) [1.5 pt] Justifier que $P(N < +\infty) = 1$. *Cette question est indépendante des questions suivantes.*

b) [1.5 pt] On pose désormais $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Montrer que $E(S_n) \sim_{+\infty} \ln n$ et que $V(S_n) = O_{+\infty}(\ln n)$.

Attention : Les propriétés d'analyse utilisées dans la démonstration ne sont pas à justifier ici.

c) [1.5 pt] Soient $0 \leq a < 1 < b$.

En utilisant l'exercice précédent avec $T_n = \dfrac{S_n}{\ln n}$, montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(a\ln n < S_n < b\ln n) = 1$.

7) Soit N une variable aléatoire entière et $\forall t \in [-1, 1]$, $G_N(t) = E(t^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, où $a_n = P(N = n)$.

a) [0.5 pt] Donner *sans justification* un événement dont la probabilité est $p = \frac{1}{2}(G_N(1) + G_N(-1))$.

b) [0.5 pt] Donner *sans justification* la série génératrice $G_M(t)$ de la variable entière $M = 2N$.

8) a) [2 pts] Soient $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires de moments d'ordre 2 finis.

On suppose que les X_i ont même loi que X et que les Y_i ont même loi que Y. On suppose de plus que $E(X) = 0$ et que chaque variable X_i est indépendante des autres, c'est-à-dire de $(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n)$.

Soient $\varepsilon_1, .., \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$.

Montrer que $Z = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i X_i Y_i$ est de moment d'ordre 2 fini et que $E(Z^2) = nE(X^2)E(Y^2)$.

b) [1.5 pt] Soit $(X_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de v.a. indépendantes de même loi, avec $\boxed{E(X_{ij}^2) = 1 \text{ et } E(X_{ij}) = 0}$.

On considère la variable aléatoire D_n donnant la valeur du déterminant de la matrice $(X_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

On a $D_0 = 1$. En raisonnant par récurrence sur n, déduire de a) que $E((D_n)^2) = n!$

9) *Exercice supplémentaire*

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes.

On suppose que Y et Z suivent des lois de Rademacher, c'est-à-dire $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

a) On suppose que la loi de X est symétrique, c'est-à-dire pour tout réel x,

$$P(X = x) = P(X = -x)$$

Montrer que que XY et XZ ont même loi que X.

b) On suppose que X suit une loi de Rademacher. Montrer que XY et XZ sont indépendantes.

Suggestion : Evaluer $P(XY = x, XZ = y)$, où x et $y \in \{-1, 1\}$ en posant $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $y = \varepsilon x$.