Interrogation n°1. *Barème sur 24.5 pts*

1) *Les deux questions sont indépendantes (extrait oral Mines).*

a) [1 pt] Montrer que tout polynôme complexe non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

b) [2.5 pts] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe.

(i) On suppose $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Montrer que P est à coefficients réels.

Indication : Utiliser le polynôme conjugué $\overline{P}$, ou bien utiliser l'interpolation de Lagrange.

(ii) Donner *sans justification* une condition nécessaire et suffisante pour que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2) [1.5 pt] (*inspiré oral X 2020*)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul qui est divisible par $(X-1)^2$.

Montrer que P admet au moins trois coefficients non nuls.

Indication : Supposer par l'absurde $P(X) = aX^p + bX^q$ avec $(a,b) \neq 0$ et $p < q$.
Utiliser la notion de racine multiple d'un polynôme.

3) [2.5 pts] (*inspiré oral Centrale 2018*) On considère le polynôme $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$.

a) Préciser *sans justification* les racines de P sur $\mathbb{C}$ et la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

b) En utilisant $(1+X)$, expliciter *sans justification* une décomposition du polynôme P en produit de deux polynômes unitaires réels non constants et à coefficients positifs.

4) (*inspiré écrit Centrale 2022*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(n+1)$ réels $x_0, x_1, ..., x_n$ tels que $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Pour tout $0 \leq k \leq n$, on pose $L_k(X) = \prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k} \left(\dfrac{X - x_j}{x_k - x_j} \right)$. On a ainsi $\deg L_k = n$.

a) [1.5 pt] Soit R un polynôme de degré $\leq n-1$. On suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(-1)^k R(x_k) > 0$.

Montrer que R est le polynôme nul (et donc que l'hypothèse n'est jamais vérifiée).

Dans la suite de l'exercice, on généralise la propriété au cas où on a seulement $(-1)^k R(x_k) \geq 0$.

b) [1 pt] Montrer la propriété suivante (sans utiliser le cours sur les polynômes de Lagrange) :

$\boxed{\text{Pour tout polynôme } R \text{ de degré} \leq n, \text{ on a : } R(X) = \sum_{k=0}^{n} R(x_k) L_k(X)}$.

c) [1.5 pt] En déduire que pour tout polynôme R tel que $\boxed{\deg R \leq (n-1)}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R(x_k)}{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k} (x_k - x_j)} = 0$$

d) [2 pts] Soit R un polynôme de degré $\leq n-1$. On suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(-1)^k R(x_k) \geq 0$.

Montrer que R est le polynôme nul.

5) [1.5 pt] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. On note $z_1, ..., z_n$ les racines de P.

Montrer qu'il existe un polynôme Q unitaire de degré n tel que $(-1)^n P(X)P(-X) = Q(X^2)$.

Expliciter les racines de Q.

6) [2 pts] (*inspiré oral X 2019*) Soit P un polynôme réel de degré 4. On suppose

que le graphe de P est tangent en les points d'abscisses 0 et 1 à une *même* droite L.

Montrer que $P^{(3)}$ admet une racine sur $]0, 1[$.

Indication : Etudier les racines de $Q = P - L$.

7) (*inspiré oral X 2000*)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel unitaire et scindé à racines simples de degré n.

On note $x_1, ..., , x_n$ ses racines, avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$. On a donc $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_n\} \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$.

a) [0.5 pt] Justifier que $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_k}$. On rappelle que la dérivée de $x \longmapsto \ln|x|$ vaut $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

b) [0.5 pt] Justifier que f est strictement décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition.

On obtient ainsi (*admis ici*) le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$			x_1				x_2		$\cdots$		x_{n-1}				x_n			$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$				$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	0

Soit $\lambda > 0$.

Par le th de la bijection, l'équation $\boxed{f(x) = \lambda}$ admet donc *exactement* n solutions $y_1, ..., y_n$ distinctes.

c) [2 pts] En utilisant le polynôme $Q(X) = \lambda P(X) - P'(X)$, montrer que $\sum_{i=1}^{n} y_i = \dfrac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^{n} x_i$.

8) a) [2 pts] On considère $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

Pour $0 \leq k \leq 2n$, on note b_k le coefficient en X^k de $P(X)^2$. Justifier :

$$b_k = \sum_{i=\max(0,k-n)}^{\min(n,k)} a_i a_{k-i}$$

b) [1 pt] Soit $0 \leq k \leq n$. Déduire de a) la valeur de $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i}$.

9) [0.5 pt] On considère le polynôme $B(x) = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$, avec $n \geq 2$ et $a_1, ..., a_n$ distincts.

En utilisant l'exercice 4), montrer que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{B'(a_k)} = 0$.

10) [1 pt] Soient deux polynômes (non nuls) A et $B \in \mathbb{C}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Donner une expression simple de $\prod_{k=0}^{n-1}(A - \omega^k B)$, en justifiant votre réponse.