Interrogation n°0 bis. Corrigé.

1) On a $z^n = -1 = e^{i\pi}$ ssi $z \in e^{i\pi/n}\, U_n = \left\{\exp\left(i\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right), \quad 0 \le k < n\right\}$.

Premier cas : $n = 2m$ pair.

Toutes les solutions de $z^n = -1$ sont non réelles et sont deux à deux conjuguées.

Donc $\mathrm{card}\,\Delta = m$ et $\Delta = \left\{\exp\left(i(2k+1)\dfrac{\pi}{n}\right), \quad 0 \le k \le m-1\right\}$.

Second cas : $n = 2m$ impair.

La seule solution réelle de $z^n = -1$ est $z = -1$. Les autres solutions sont deux à deux conjuguées.

Donc $\mathrm{card}\,\Delta = m+1$ et $\Delta = \left\{\exp\left(i(2k+1)\dfrac{\pi}{n}\right), \quad 0 \le k \le m\right\}$.

2) a) *Première méthode* :

Pour construire un élément de Δ, on choisit A, puis on choisit B parmi les $2^{n-\mathrm{card}\,A}$ parties de $E \setminus A$.

Donc $\mathrm{card}\,\Delta = \sum_{A \subset E} 2^{n-\mathrm{card}\,A} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$ par la formule du binôme.

Seconde méthode : A chaque chaque couple $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $A \cap B = \emptyset$, on associe la fonction

$$f : E \to \{0,1,2\} \text{ définie par } f(x) = 0 \text{ si } x \in A,\ f(x) = 1 \text{ si } x \in B \text{ et } f(x) = 2 \text{ sinon}$$

On obtient ainsi une bijection de Δ sur l'ensemble des fonctions $f : E \to \{0,1,2\}$.

Donc $\mathrm{card}\,\Delta = 3^n$.

b) Le nombre total de couples (A,B) vaut $(2^n) \times (2^n) = 4^n$. Donc $p = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

3) a) On a $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)R_k - \sum_{k=1}^{n} kR_k$.

La seconde somme peut être indexée à partir de $k = 0$, et par ailleurs, on a $R_n = 0$.

On obtient donc $E(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1-k)R_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k$.

b) Faire un tirage sans remise revient à choisir une partie aléatoire $A = \{X_1, ..., X_p\}$ de cardinal k.

On a $\min A > k$ ssi $A \subset [\![k+1, n]\!]$, donc il existe $\binom{n-k}{p}$ parties possibles.

D'où $R_k = \dfrac{\binom{n-k}{p}}{\binom{n}{p}}$. Donc par a),

$$E(Y) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \binom{j}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{\sum_{j=p}^{n} \binom{j}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{\binom{n+1}{p+1}}{\binom{n}{p}} = \frac{n+1}{p+1}.$$

Remarque : Si on raisonne avec les p-uplets injectifs $(X_1, ..., X_p)$, il convient de multiplier numérateur et dénominateur par $p!$, ce qui naturellement ne modifie pas le résultat final.

c) (i) Comme les X_i sont indépendantes, $P(Y > k) = \prod_{i=1}^{p} P(X_i > k) = \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^p$.

Donc $E(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^p = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{n}\right)^p$.

(ii) Par les sommes de Riemann, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 t^p\, dt = \dfrac{1}{p+1}$.

Donc $E(Y) \sim \dfrac{n}{p+1}$ lorsque $n \to +\infty$ (même équivalent que dans le cas des tirages sans remise).

(iii) On a $\lim_{p\to+\infty} E(Y) = \sum_{k=1}^n \lim_{p\to+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^p = 1$, car pour tout $k < n$, $\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^p = 0$.

La limite obtenue s'interprète aisément : en effectant des tirages de plus en plus nombreux, la probabilité d'obtenir la valeur 1 à l'un des p tirages tend vers 1, et dans ce cas, Y vaut 1..

Plus précisement, on a $1 \leq E(Y) \leq P(Y=1) + nP(Y \geq 2) \to_{p\to+\infty} 1$, car $P(Y=1) \to_{p\to+\infty} 1$.

4) a) Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre premier p divisant à la fois b et $a-b$.

Alors p divise $a = b + (a-b)$, ce qui contredit $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$.

b) On raisonne **par récurrence forte sur** $n = \max(a,b)$**.**

La propriété est immédiate pour $n = 1$, car on a alors $a = b = 1$ et on peut prendre $(u,v) = (1,0)$.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n-1$, avec $n \geq 2$.

On ne peut pas avoir $a = b = n$, car a et b sont premiers entre eux. On peut donc supposer $a > b$.

Par a), $\mathrm{pgcd}(b, a-b) = 1$. Et d'autre part, $\max(b, a-b) < a = n$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $bu + (a-b)v = 1$. D'où $av + b(u-v) = 1$. D'où le résultat.

5) a) On considère une des deux chaussettes de la paire. Il y a $(n-1)$ autres chaussettes dans le tiroir.

Ainsi, la probabilité que la chaussette appariée se trouve dans le même tiroir vaut $r = \dfrac{n-1}{2n-1}$.

Autre méthode : On peut aussi obtenir r par dénombrement : si on numérote les chaussettes de 1 à $2n$ et les tiroirs de 1 à 2, il y a $\binom{2n}{n}$ répartitions possibles (en distinguant les deux tiroirs : on choisit les n chaussettes se trouvant dans le premier tiroir), et il y a $2 \times \binom{2n-2}{n-2}$ configurations où la paire i est complète (on choisit le tiroir qui les contient, puis les autres chaussettes de ce tiroir).

On a alors $r = 2 \times \binom{2n-2}{n-2} / \binom{2n}{n} = 2 \times \dfrac{n(n-1)}{(2n)(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2n-1}$.

b) On a $N = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$, où A_i est l'événement : " La paire numéro i est complète ".

Par linéarité de l'espérance, on a donc $E(N) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = nr = \dfrac{n(n-1)}{2n-1}$.

c) - En utilisant la formule de l'intersection :

On considère l'événement B_i : " La paire numéro i n'est pas complète ".

On a alors $p = P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)...$

Or, comme au a), $P(B_i \mid B_1 \cap B_2 \cap B_{i-1}) = \dfrac{n-(i-1)}{2n-2(i-1)-1} = \dfrac{n-i+1}{2n-2i+1}$.

Donc $p = \prod_{i=1}^n \dfrac{n-i+1}{2n-2i+1} = \dfrac{n}{2n-1}\dfrac{n-1}{2n-3}...\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1} = \dfrac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1)} = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$.

- En utilisant un dénombrement : On choisit les n chaussettes mises dans le premier tiroir.

Le nombre de configurations totales est $\binom{2n}{n}$.

Le nombre de configurations sans paire complète est 2^n (pour chaque paire, on choisit la chaussette du premier tiroir). On obtient donc $p = 2^n / \binom{2n}{n}$.

6) a) La fonction $\varphi : a \longmapsto a + \dfrac{1}{a}$ atteint sur $]0,+\infty[$ son minimum en $a = 1$, donc $\varphi(a) \geq 2$, c'est-à-dire $a + b \geq 2$.

b) On a $ab + 1 - (a + b) = (a - 1)(b - 1) \leq 0$, car $a - 1 \leq 0$ et $b - 1 \geq 0$.

c) On a nécessairement $a_1 \leq 1$ (sinon on aurait le produit $a_1 a_2 ... a_n > 1$) et de même $a_n \geq 1$.

On déduit alors l'inégalité de la question b).

d) On suppose la propriété vraie au rang n : on a $\forall (b_1, ..., b_n) \in [0, +\infty[^n$, $b_1 b_2 ... b_n = 1 \Rightarrow b_1 + b_2 + ... + b_n \geq n$.

Montrons la propriété au rang $(n + 1)$. Soit $(a_1, ..., a_{n+1}) \in [0, +\infty[^n$ tel que $a_1 a_2 ... a_n a_{n+1} = 1$.

Quitte à les rénuméroter, on peut supposer $a_1 \leq ... \leq a_{n+1}$.

La seule façon de pouvoir l'hypothèse de récurrence est de faire apparaitre un produit de n réels qui vaut 1. On considère donc $a_2 ... a_n (a_1 a_{n+1}) = 1$, et on applique l'hyp de rec.

Donc $a_2 + a_3 + ... + a_n + (a_1 a_{n+1}) \geq n$. Or, par c), on a : $a_1 + a_{n+1} \geq a_1 a_{n+1} + 1$ par c).

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} a_k \geq (a_2 + a_3 + ... + a_n) + (a_1 a_{n+1}) + 1 \geq n + 1$.

e) L'inégalité est immédiate si l'un des x_k est nul. Supposons désormais que tous les x_k sont > 0.

On applique d) à $a_k = \dfrac{x_k}{d}$, où $d = (x_1 x_2 ... x_n)^{1/n}$. On a bien $a_1 a_2 ... a_n = \dfrac{x_1 x_2 ... x_n}{d^n} = 1$.

Par d), on a : $1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} x_k$, c'est-à-dire $d \leq \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Remarque culturelle : Une autre preuve consiste à utiliser la concavité de la fonction ln.