Interrogation n°0. Corrigé

1) a) Par hypothèse, la suite $(|a_n|\, 2^{-n})_{n\geq p}$ est bornée par un réel M pour p assez grand.

Et il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $n \leq p$. Donc il existe $N = \max(|a_n|\, 2^{-n})_{n\leq p}$.

On prend $\mu = \max(N, M)$.

b) (i) Supposons f continue. Comme $f(x) = O_{+\infty}(1)$, f est bornée au voisinage de $+\infty$.

Donc il existe $a \geq 0$ et λ tels que $\forall x \in [0, +\infty[,\ |f(x)| \leq \lambda$.

Et par Weierstrass, f est bornée sur le segment $[0, a]$, donc $\mu = \max(\lambda, \sup_{[0,a]} |f|)$ convient.

(ii) Non : *Contre-exemple* : On considère f définie par $f(0) = 0$ et $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2) a) Si $2^a 3^b \leq n$, alors $2^a \leq n$ et $3^b \leq n$, donc $0 \leq a \leq \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$ et $0 \leq b \leq \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln 3} \right\rfloor$.

L'application $(a, b) \longmapsto 2^a 3^b$ est injective par unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Donc λ_n est exactement le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^a 3^b \leq n$.

Donc $\lambda_n \leq \left(1 + \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor\right) \times \left(1 + \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln 3} \right\rfloor\right) = O((\ln n)^2)$.

b) Comme $(\ln n)^2 = O(\sqrt{n})$, alors $\dfrac{\lambda_n}{n^2} = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Par comparaison avec les séries de Riemann, la série $\sum \dfrac{\lambda_n}{n^2}$ converge.

3) a) f' est continue sur le segment $[0, 1]$, donc par Weierstrass, il existe $M = \sup_{[0,1]} |f'|$.

Par l'inégalité des accroissements finis, on a $|f(x) - f(y)| \leq M\, |x - y|$. Ainsi, f est M-lipschitzienne.

b) $\left|(y - x) f(y) - \int_x^y f(t)\ dt - \right| = \left|\int_x^y f(y) - f(t)\ dt\right| \leq \int_x^y |f(y) - f(t)|\ dt \leq \int_x^y M(y - t)\ dt = \dfrac{1}{2} M(y - x)^2$.

c) On a $S_n - \int_0^1 f(t)\ dt = \sum_{k=1}^n \left(\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) - \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\ dt\right)$.

Par b), on a $\left|\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) - \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\ dt\right| \leq \dfrac{M}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2$, donc $\left|S_n - \int_0^1 f(t)\ dt\right| \leq \sum_{k=1}^n \dfrac{M}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{M}{2n}$.

A fortiori, on a par pincement : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\ dt$.

4) a) On a : $\mathrm{card}(\mathcal{E}) = n^n$, car il y a n choix possibles pour chaque $f(x)$, où $x \in \Delta$.

b) Soit $(x, y) \in \Delta^2$. Le nombre de fonctions $f : \Delta \to \Delta$ vérifiant $f(x) = y$ est égale au nombre de fonctions de $\Delta \setminus \{x\}$ dans Δ, c'est-à-dire n^{n-1}. Donc $P(f(x) = y) = \dfrac{n^{n-1}}{n^n} = \dfrac{1}{n}$.

c) On a

$$N_f(y) = \sum_{x\in\Delta} 1_{f(x)=y}$$

Les variables $1_{f(x)=y}$ sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $N_f(y)$ suit **la loi binomiale** $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{n}\right)$.

d) On a $M_f = \sum_{y\in\Delta} 1_{N(y)\geq 2}$, donc $E(M_f) = nP(N(y)\geq 2) = n(1 - P(N(y)=0) - P(N(y)=1))$.

Or, on a $P(N(y)=0) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $P(N(y)=1) = \binom{n}{1}\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

On a $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$, car $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = -1$. De même, $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1} \to e^{--1}$.

Donc $E(M_f) \sim n(1-2e^{-1})$ lorsque $n\to+\infty$.

5) a) La suite est bien définie par récurrence forte car $\forall n\geq 2,\ 1\leq \lfloor n/2\rfloor < n$.

b) On a $a_n = 2a_{n/2} = 4a_{n/4} = ... = 2^p a_1 = 2^p = n$.

c) On montre la propriété par récurrence forte sur n.

La propriété est immédiate pour $n=1$, car $a_1 = 1 = 2^0 = n$.

Soit $n\geq 1$ et supposons la propriété vraie pour tout $1\leq k<n$.

Par hypothèse de récurrence appliquée à $m = \lfloor n/2\rfloor$, a_m est de la forme 2^p et on a $a_m \leq m \leq 2a_m - 1$.

Par définition, on a $a_n = 2a_m$, donc $a_n = 2^{p+1}$ est bien une puissance de 2.

De plus, $n = 2m$ ou $n = 2m+1$, donc $n \geq 2m \geq 2a_m = a_n$ et $n \leq 2m+1 \leq 2(2a_m-1)+1 < 4a_m = 2a_n$.

D'où le résultat.

d) Par c), a_n est la plus grande puissance de 2 qui est inférieure ou égale à n.

On a donc $a_{2022} = 10000000000$ en base 2, c'est-à-dire $a_{2022} = 2^{10} = 1024$.

e) Par c), on a $n < 2a_n$, c'est-à-dire $a_n > \dfrac{n}{2}$.

Ainsi, $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)^2 = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et on en conclut que la série $\sum\left(\dfrac{1}{a_n}\right)^2$ converge.

6) Pour $A\subset\mathbb{N}$, on définit la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\varepsilon_n = 0$ si $n\in A$ et $\varepsilon_n = 1$ si $n\notin A$.

Comme A est infinie, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\{0,1\}$ non stationnaire en 1.

Plus précisement, on obtient ainsi *toutes* les suites à valeurs dans $\{0,1\}$ non stationnaires en 1.

Par l'unicité de l'écriture d'un réel en base 2, on en déduit que l'application

$$f : A \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n 2^{-(n+1)}$$

est bien une bijection de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ sur $[0,1[$.

Remarque : On a par exemple $f(\mathbb{N}\setminus\{1,2\}\} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

7) *Rappel* : Si z et z' sont des complexes non nuls, on a l'inégalité triangulaire $|z+z'|\leq|z|+|z'|$.

Et il y a égalité ssi z et z' ont même argument.

Considérons $a \in U$ cercle unité, et notons $b = -a$ le point diamétralement opposé.

Alors $|a - b| = 2$, donc $|f(a) - f(b)| = 2$.

Or, $|f(a)| \leq 1$ et $|f(b)| \leq 1$. Par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans les complexes, on en déduit que $f(a)$ et $-f(b)$ ont même module 1 et même argument (c'est-à-dire $f(b) = -f(a)$).

Donc $f(a)$ et $f(b)$ sont des points de U diamétralement opposés.

On a $|f(a) - f(0)| = |a - 0| = 1$ et $|f(b) - f(0)| = |b - 0| = 1$.

Ainsi, $2 = |f(b) - f(a)| = |f(b) - f(0) + f(0) - f(a)| \leq |f(b) - f(0)| + |f(0) - f(a)| = 2$.

Par le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, $f(b) - f(0)$ et $f(0) - f(a)$ ont même argument.

Donc $f(0)$ appartient au segment $[f(a), f(b)]$. Comme $|f(a) - f(0)| = |f(b) - f(0)|$, $f(0)$ est le milieu de ce segment, et comme ce segment est un diamètre du cercle U, alors $f(0) = 0$.

Variante : Au lieu de raisonner avec un segment $[a, b]$ diamètre du cercle unité, on peut raisonner avec un triangle équilatéral abc inscrit sur le cercle unité. Les points $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$ forment dont un triangle équilatéral de même côté, et $f(0)$ est équidistant de $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$, donc $f(0)$ est le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Ce rayon ayant aussi comme rayon 1 et étant inclus dans D, il s'agit du cercle unité, donc $f(0) = 0$.