Interrogation n^{o}0 bis. *Barème sur 24 pts*

1) [2.5 pts] Soit un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$.

On note Δ l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\boxed{z^n = -1 \text{ et } \operatorname{Im} z \geq 0}$.

Donner la valeur de $\operatorname{card} \Delta$ et expliciter Δ.

On distinguera deux cas selon que $n = 2m$ (c'est-à-dire n pair) ou $n = 2m + 1$ (n impair).

2) [3 pts] Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

a) On note l'ensemble Δ des couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Calculer $\operatorname{card} \Delta$.

b) On munit $\mathcal{P}(E)$ de la loi uniforme.

Déterminer la probabilité p pour que deux parties A et B arbitraires soient disjointes.

3) Soient n et p des entiers naturels non nuls.

On effectue p tirages X_1,..., X_p dans l'ensemble $E = [\![1, n]\!]$ muni de la loi uniforme.

On pose $Y = \min(X_1, ..., X_p)$. Ainsi, Y est une variable aléatoire à valeurs dans E.

Les questions b) et c) sont indépendantes.

a) [2 pts] On pose $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k)$. Montrer que $E(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} R_k$, où $\boxed{R_k = P(Y > k)}$.

b) [3.5 pts] On suppose que les tirages se font *sans remise*.

En raisonnant en termes de parties (ou bien de p-uplets injectifs), déterminer une expression simple de R_k.

Avec la formule dite "de la crosse de hockey", en déduire *sans justification* la valeur de $E(Y)$.

c) [3.5 pts] On suppose que les tirages se font *avec remise*.

Autrement dit, $X_1, ..., X_p$ sont des variables aléatoires *indépendantes* et de même *loi uniforme*.

(i) Déterminer $R_k = P(Y > k)$.

(ii) On suppose p fixé. Donner *sans justification* un équivalent de $E(Y)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(iii) On suppose n fixé. Donner *sans justification* $\lim_{p \to +\infty} E(Y)$. Interpréter intuitivement le résultat.

4) Soient a et b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux, c'est-à-dire a et $b \in \mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.

Rappel : Deux entiers sont premiers entre eux ssi *aucun* nombre premier p ne les divise tous les deux.

a) [0.5 pt] Montrer que b et $a - b$ sont premiers entre eux.

b) [2 pts] En déduire (en rédigeant *avec soin*) qu'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$.

5) On considère n paires *distinctes* de chaussettes, qu'on numérote de 1 à n.

Les $2n$ chaussettes sont réparties aléatoirement en nombre égal dans deux tiroirs.

Autrement dit, chaque tiroir contient exactement n chaussettes.

On dit qu'une paire de chaussettes est *complète* si les deux chaussettes qui la constituent se trouvent dans un même tiroir. On note N le nombre de paires complètes.

La question c) est indépendante des deux précédentes.

a) [1 pt] Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminer la probabilité r que la paire numéro i soit complète.

b) [1 pt] En déduire l'espérance $E(N)$ du nombre de paires complètes.

c) [2 pts] Déterminer la probabilité p pour que $N = 0$, c'est-à-dire pour qu'aucune paire ne soit complète.

Suggestion : On pourra raisonner soit avec la formule de l'intersection en probabilités, soit en dénombrant les différentes configurations associées au problème.

6) a) [0.5 pt] Soient a et $b \in [0, +\infty[$ tels que $ab = 1$. Montrer que $a + b \geq 2$.

b) [0.5 pt] Soient a et $b \in [0, +\infty[$ tels que $a \leq 1 \leq b$. Montrer que $ab + 1 \leq a + b$.

Indication : Factoriser $ab + 1 - a - b$.

c) [0 pt] Soient $n \geq 2$ et $(a_1, ..., a_n) \in [0, +\infty[^n$ tels que $\boxed{a_1 a_2 ... a_n = 1}$ et $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.

Montrer que $a_1 + a_n \geq a_1 a_n + 1$.

d) [1.5 pt] (★) Démontrer avec soin que $\forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in [0, +\infty[^n$, $\boxed{a_1 a_2 ... a_n = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \geq n}$.

e) [0.5 pt] (★) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tous réels positifs $x_1, ..., x_n$, on a

$$(x_1 x_2 ... x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$