Interrogation n°0. *Barème sur 23.5 pts*

1) On rappelle que $O_{+\infty}(1)$ désigne une fonction (ou une suite) bornée sur un voisinage $[a,+\infty[$ de $+\infty$.

a) [1.5 pt] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_n = O_{+\infty}(2^n)$, c'est-à-dire $a_n = 2^n\ O_{+\infty}(1)$.

Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \mu 2^n$.

b) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application telle que $f(x) = O_{+\infty}(1)$.

(i) [1 pt] On suppose *de plus* que f est continue.

Montrer qu'il existe une constante μ telle que $\forall x \in [0,+\infty[$, $|f(x)| \leq \mu$.

(ii) [1 pt] La propriété du (i) est-elle toujours vraie si f n'est plus supposée continue ?

2) On note Δ l'ensemble des entiers de la forme $2^a 3^b$, où $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. On pose $\lambda_n = \mathrm{card}(\Delta \cap [\![1,n]\!])$.

Ainsi, λ_n est le nombre d'entiers de la forme $2^a 3^b$ qui sont compris entre 1 et n.

Par exemple, $\lambda_{10} = 7$, car les entiers compris entre 1 et 10 de la forme $2^a 3^b$ sont $1, 2, 3, 4, 6, 8$ et 9.

a) [2 pts] Montrer qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_n = O_{+\infty}((\ln n)^p)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) [1.5 pt] Montrer la série $\sum \dfrac{\lambda_n}{n^2}$ converge.

On rappelle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $(\ln n)^\alpha = o_{+\infty}(n^\varepsilon)$.

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application **de classe** C^1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

a) [1 pt] Justifier brièvement l'existence de M tel que $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$.

b) [1.5 pt] Montrer que pour tous $0 \leq x \leq y \leq 1$, on a : $\left|(y-x)f(y) - \int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \dfrac{1}{2}M(y-x)^2$.

c) [2.5 pts] En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\,dt$.

4) (*inspiré oral X 2022*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère **un ensemble Δ de cardinal** n.

a) [1 pt] On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications $f : \Delta \to \Delta$. Donner *sans justification* le cardinal de E.

b) [1 pt] On munit $\mathcal{E}$ de la loi uniforme. Montrer que $\forall (x,y) \in \Delta^2$, $P(f(x) = y) = \dfrac{1}{n}$.

Remarque pour la bonne compréhension de l'énoncé :

f est ici une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire une fonction aléatoire de Δ dans Δ).

c) [1.5 pt] Soit $y \in \Delta$. On note $N_f(y) = \mathrm{card}\{x \in \Delta \mid f(x) = y\}$ le nombre d'antécédents de y par f.

Déterminer la nature de la loi de la variable aléatoire $N_f(y)$.

Important : On vérifie aisément (*admis ici*) que les événements $(f(x) = y)$, où $x \in \Delta$, sont indépendants.

Suggestion : Il est conseillé de faire intervenir une somme de variables de Bernoulli.

d) [2 pts] (★) Soit $f \in \mathcal{E}$. On note M_f le nombre d'éléments $y \in \Delta$ ayant au moins deux antécédents par f.

Donner un équivalent de l'espérance $E(M_f)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) (*inspiré oral Mines 2022*) On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

On considère la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2\ , \quad a_n = 2\ a_{\lfloor n/2 \rfloor}$$

a) [0.5 pt] Expliquer pourquoi la relation précédente permet de bien définir $(a_n)_{n\geq 1}$ par récurrence (forte).

b) [0 pt] On suppose $n = 2^p$, où $p \in \mathbb{N}$. Donner *sans justification* la valeur de a_n.

c) [2 pts] Montrer que a_n est une puissance de 2 et que $a_n \leq n < 2a_n$..

d) [0.5 pt] L'écriture en base 2 de $n = 2022$ est 11111100110 : il y a 11 chiffres et le dernier chiffre est le chiffre des unités (il vaut 0 car n est pair). Donner *sans justification* l'écriture en base 2 de a_{2022}.

e) [0.5 pt] Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{a_n}\right)^2$ converge.

6) [1 pt] (★) On note $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties **infinies** de $\mathbb{N}$.

Expliciter *sans justification* une **bijection** f de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ sur $[0, 1[$.

Indication : Utiliser l'écriture des réels en base 2.

7) [1.5 pt] (★) (*inspiré oral X 2022*)

On considère D le disque unité du plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. On note 0 le centre du disque.

Soit $f : D \to D$ une **isométrie**, c'est-à-dire $\forall x \in D,\ \ f(x) \in D$ et

$$\forall (x, y) \in D^2,\ \ |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

Montrer qu'on a nécessairement $f(0) = 0$.

Indication : Considérer des segments ou des triangles judicieusement choisis.