Interrogation n°25 bis. Corrigé

Exercice A

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On considère $u_n = \prod_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{1}{k}\right)$. On note R le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

1) i) $u_n = \alpha^n$ et $R = \dfrac{1}{|\alpha|}$ (*Remarque* : Valeur absolue !) ; ii) $u_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ et $R = +\infty$ (car $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 0$).

iii) $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\dfrac{p}{k} - 1\right) = \dfrac{(p-1)(p-2)...(p-n)}{n!} = \binom{p-1}{n}$. *Remarque* : $u_n = 0$ si $n \geq p$.

La série entière est donc ici un polynôme et a fortiori $R = +\infty$.

2) a) Par continuité de f en 0, on a $f(t) > 0$ pour t sur un voisinage de 0, donc $f\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$ pour k assez grand.

b) On a $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |f(0)| < 1$, donc $\sum u_n$ converge par le critère de D'Alembert.

Rappel : La preuve consiste à choisir r tel que $|f(0)| < r < 1$ et à noter que $\left|f\left(\frac{1}{k}\right)\right| \leq r$ pour $k \geq k_0$ assez grand.

On en déduit que $|u_n| \leq M r^{k-k_0}$, donc $u_n = O(r^n)$, donc $\sum |u_n|$ converge (par comparaison avec $\sum r^n$).

c) Par le même argument, $\sum u_n$ diverge.

3) a) On cherche à évaluer asymptotiquement w_n (donc v_n). Pour les séries, on utilise des *DL* en *grand* $O(...)$:

On a $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\beta} = f\left(\dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\beta}$.

Or, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{\beta}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\beta} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Donc $\dfrac{v_n}{v_{n-1}} = 1 + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On en conclut que $\sum w_n$ converge (absolument).

b) Comme $w_n = \ln(v_n) - \ln(v_{n-1})$, alors la suite $(\ln(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On pose $\lambda = \lim_{n\to+\infty} \ln(v_n)$. Par continuité de exp, on a : $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$, avec $L = e^{\lambda} > 0$. Donc $u_n \sim L\, n^{\beta}$.

c) En particulier, $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1$, donc $R = 1$.

Le domaine de convergence contient $]-1, 1[$ et est inclus dans $[-1, 1]$.

Les seuls cas problématiques sont donc ceux associés à $x = 1$ et $x = -1$.

- Pour $x = 1$: La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (car $f > 0$), donc $\sum u_n$ converge ssi $\sum n^{\beta}$ converge, donc ssi $\beta < -1$.

- Pour $x = -1$, la situation est plus compliquée, car il s'agit d'étudier la série $\sum(-1)^n u_n$.

On va utiliser notamment le critère spécial des séries alternées.

En effet, si $\beta \geq 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum(-1)^n u_n$ diverge.

Si $\beta < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. De plus, on a $f'(0) < 0$, donc $f(t) < 1$ pour $t > 0$ assez petit.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang. On en déduit que $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Exercice B. Fonction de Bessel

1) Posons $u_n = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}$. On a $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{|x|^2}{4(n+1)^2} = 0$.

Par d'Alembert, $\sum u_n$ converge pour toute valeur de x. Donc $R = +\infty$.

2) Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction définie par une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Pour $|x| < R$, on a : $(xy'' + y') + xy = \sum_{n=0}^{+\infty}(n(n+1) + n + 1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$.

Une série entière s'annule sur $]-R, R[$ ssi tous les coefficients de la série sont nuls.

Donc y vérifie (E) ssi $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)^2} a_{n-1}$.

Donc $a_n = 0$ si n est impair, et si $n = 2m$ est pair, $a_n = \dfrac{(-1)^m}{2^2.4^2....(2m)^2} a_0 = \dfrac{(-1)^m}{4^m (m!)^2} a_0$.

En imposant de plus $a_0 = 1$, on obtient bien comme unique solution $J(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \dfrac{x^{2m}}{4^n (m!)^2}$.

3) Posons $K(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix\cos\theta)\ d\theta$.

- On a bien $K(0) = 1$.

- Montrons que K est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On fixe $x \in \mathbb{R}$.

Par le DSE de exp, on a : $\forall x \in [0, 2\pi]$, $\exp(ix\cos\theta) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(ix\cos\theta)^n}{n!}$.

La série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(ix\cos\theta)^n}{n!}$ converge normalement sur le segment $[0, 2\pi]$.

En effet, $\sup_{\theta \in [0,2\pi]} \left| \dfrac{(ix\cos\theta)^n}{n!} \right| = \dfrac{|x|^n}{n!}$, et la série $\sum \dfrac{|x|^n}{n!}$ converge (vers $\exp(|x|)$).

Donc $K(x) = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \dfrac{(ix\cos\theta)^n}{n!}\ d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n x^n}{n!}$, où $a_n = \dfrac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n\ d\theta$.

Et K est bien DSE sur $\mathbb{R}$.

- Pour montrer finalement que $K(x) = J(x)$, il y a deux méthodes : soit on calcule les a_n (variante des intégrales de Wallis) soit on montre (via les intégrales paramétrées) que K vérifie l'équation différentielle (E) :

Première méthode :

Posons $\omega_n = \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^n\ d\theta$.

On vérifie par une IPP que $\forall n \geq 2$, $a_n = (n-1) \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{n-2} (\sin\theta)^2\ d\theta = (n-1)(a_{n-2} - a_n)$.

Donc $\forall n \geq 2$, $a_n = \dfrac{n-1}{n} a_{n-2}$. Or, $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

Donc $a_n = \dfrac{1 \times 3 \times ... \times (2m-1)}{2 \times 4 \times ... \times (2m)} = \dfrac{(2m)!}{4^m (m!)^2}$ si $n = 2m$ pair, et $a_n = 0$ si n impair.

On retrouve donc bien : $K(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^m}{4^m (m!)^2} x^{2m}$.

Seconde méthode :

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $f(x, \theta) = \exp(ix\cos\theta)$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \theta) \right| = |i\cos\theta \exp(ix\cos\theta)| \leq 1 = \varphi(\theta)$, avec φ intégrable sur $[0, 2\pi]$.

De même $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \theta) \right| = \left| -(\cos\theta)^2 \exp(ix\cos\theta) \right| \leq 1 = \varphi(\theta)$.

Par dérivation des intégrales paramétrées, on obtient donc :

$K'(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i\cos\theta \exp(ix\cos\theta)\ d\theta$ et $K''(x) = -\dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^2 \exp(ix\cos\theta)\ d\theta$.

Ainsi $xK'' + K'(x) + xK(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x(\sin\theta)^2 + i\cos\theta) \exp(ix\cos\theta)\ d\theta$, car $1 - (\cos\theta)^2 = (\sin\theta)^2$.

Or, par une intégration par parties, on a :

$\int_0^{2\pi} x(\sin\theta)^2 \exp(ix\cos\theta)\ d\theta = \left[-(\sin\theta) \times \dfrac{1}{i} \exp(ix\cos\theta) \right] + \dfrac{1}{i} \int_0^{2\pi} (\cos\theta) \exp(ix\cos\theta)\ d\theta$.

Donc $\int_0^{2\pi} x(\sin\theta)^2 \exp(ix\cos\theta)\ d\theta = -i \int_0^{2\pi} (\cos\theta) \exp(ix\cos\theta)\ d\theta$. D'où $xK'' + K'(x) + xK(x) = 0$.

Exercice C

1) R est continue, donc par le TVI, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $x_k \in]a_{k-1}, a_k[$ tel que $R(x_k) = 0$.

On en déduit que P admet au moins n racines distinctes, donc par degré, R est nul.

2) a) $\mu_k = \prod_{j \neq k}(a_k - a_j)$ est du signe de $(-1)^k$, car $\forall j < k$, $a_k - a_j < 0$ et $\forall j > k$, $a_k - a_j > 0$.

b) On a $R(X) = \sum_{k=0}^{n} R(a_k) L_k(X)$. Le coefficient en X^n est donc $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{R(a_k)}{\mu_k} = 0$, car $\deg R < n$.

Or, $(-1)^k R(a_k) \geq 0$, donc par 1), $\dfrac{R(a_k)}{\mu_k} \geq 0$. Donc tous les $\dfrac{R(a_k)}{\mu_k}$ sont nuls.

Par degré, R est identiquement nul.

3) Supposons $Q \in E_{n-1}$ tel que $\|f - Q\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty$. Posons $R = P - Q = (P - f) - (Q - f)$.

On a donc $R(a_k) = (-1)^k \|f - P\|_\infty + (f - Q)(a_k)$. Comme $(f - Q)(a_k) \leq \|f - P\|_\infty$, alors $R(a_k) \geq 0$.

Par 2) b), $R = 0$, c'est-à-dire $P = Q$. Par contraposition, $\|f - Q\|_\infty \geq \|f - P\|_\infty$, avec égalité ssi $Q = P$.

Remarque culturelle : Par un argument de compacité, on montre qu'il existe $P \in E_{n-1}$ minimisant $\|f - P\|_\infty$.

On arrive aussi à montrer que $f - P$ vérifie la propriété d'équi-oscillation.

La propriété du 3) permet alors de prouver que P est unique.

Exercice D

1) Posons $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$. Alors $f(x) = \exp(a_0)\exp(a_1 x)\ldots\exp(a_d x^d)$.

Chaque fonction $x \longmapsto \exp(a_k x^k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(a_k)^n x^{kn}}{n!}$ est DSE en 0 de rayon $+\infty$.

Par produit de Cauchy, il en est de même de $f(x)$ qui est un produit FINI de ces fonctions.

Par la formule de Cauchy $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, un produit de DSE à coefficients positifs est à coefficients positifs.

Donc le DSE de f est à coefficients positifs.

2) a) Les $a_n = \dfrac{b_n x^n}{f(x)}$ sont positifs et de somme 1, d'où le résultat :

On rappelle la propriété (supposée connue) du programme officiel : Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, il existe une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = a_n$.

b) Le plus simple est d'utiliser la série génératrice $G_X(t) = E(t^X)$.

On a $\forall t \in [-1, 1]$, $\boxed{G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{b_n x^n t^n}{f(x)} = \dfrac{f(tx)}{f(x)} = \dfrac{\exp(P(tx))}{\exp(P(x))}}$.

On a donc $G_X'(1) = \dfrac{x f'(x)}{f(x)} = x P'(x)$ et $G_X''(1) = \dfrac{x^2 f''(x)}{f(x)} = x^2 P''(x) + x^2 P'(x)^2$.

On en déduit $E(X) = xP'(x)$ et $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 = x^2 P''(x) + x P'(x)$.

Ainsi, $E(X) = xP'(x) = \sum_{k=0}^{d} k a_k x^k$.

Et $V(X) = x^2 P''(x) + x P'(x) = \sum_{k=0}^{d} k(k-1) a_k x^k + \sum_{k=0}^{d} k a_k x^k = \sum_{k=0}^{d} k^2 a_k x^k$.

3) a)

- Par linéarité de l'espérance, $E(Z) = \sum_{k=0}^{d} k E(Y_k) = \sum_{k=0}^{d} k a_k x^k$.

- Les kY_k sont indépendants, donc $V(Z) = \sum_{k=0}^{d} V(kY_k) = \sum_{k=0}^{d} k^2 V(Y_k) = \sum_{k=0}^{d} k^2 a_k$.

b) Considérons une variable aléatoire Y de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On a $\boxed{G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}}$.

On rappelle que $E(Y) = \lambda$ et $V(Y) = \lambda$.

La variable kY a pour série génératrice $\boxed{G_{kY}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)t^{kn} = G_Y(t^k) = e^{\lambda(t^k-1)}}$.

Les Y_k sont indépendantes, donc les kY_k sont indépendantes, et ainsi on a :

$$\forall t \in [-1,1], \quad G_Z(t) = \prod_{k=0}^{d} G_{kY_k} = \prod_{k=0}^{d} e^{a_k x^k (t^k-1)} = \frac{e^{P(tx)}}{e^{P(x)}} = G_X(t)$$

Ainsi, X et Z ont même série génératrice, donc même loi (deux séries entières égales sur $[-1,1]$ ont mêmes coefficients car mêmes dérivées en 0). Donc X et Z ont même espérance et même variance.

Par 2) b), on retrouve les valeurs de l'espérance et de la variance.

Exercice E

1) En associant $+1$ à une parenthèse ouvrante et -1 à une parenthèse fermante, toute formule parenthésée avec n paires de parenthèses s'identifie à un élément de $\{-1,1\}^{2n}$: il s'agit en fait des mots de Dyck (tout préfixe contient un nombre de $+1$ supérieur ou égal au nombre de -1).

On a donc $c_n \leq \text{card}(\{-1,1\}^{2n}) = 2^{2n} = 4^n$. Et le rayon de convergence vérifie $R \geq \dfrac{1}{4} > 0$.

2) Pour $x \in]-R,R[$, on a $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n+1}x^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} x \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n$.

Par produit de Cauchy, on a : $\forall x \in]-R,R[$, $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\right) x^n$.

Donc $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = 1 + xf(x)^2$.

Remarque : Le produit de Cauchy de deux séries entières s'applique à l'intérieur du disque de convergence (valable car il y a convergence absolue des séries).

3) Soit $x \in]-R,R[$. On a : $f(x) = 1 + xf(x)^2$. D'où $1-4x \geq 0$ et $f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$.

Remarque : En particulier, on a nécessairement $R \leq \dfrac{1}{4}$, d'où avec a), $R = \dfrac{1}{4}$.

Il reste à prouver que $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

On a au voisinage de 0, $f(x) = c_0 + \mathfrak{o}(1)$, c'est-à-dire $f(x) \sim 1$.

Or, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ diverge lorsque $x \to 0^+$.

Donc nécessairement, sur un voisinage $]-r,r[$ de 0 (avec $r \leq R$), on a $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

(sinon, il existerait $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $f(x_n) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x_n}}{2x_n}$, ce qui contredit $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$).

4) Par le cours, on a on sait que $u \longmapsto \sqrt{1-u}$ est DSE de rayon $R=1$, donc

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \sqrt{1-u} = (1-u)^{1/2} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{3}{2}\right)\frac{u^n}{n!}$$

Donc pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{2}\cdots\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4^n}\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Donc $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} 4^{n+1}a_{n+1}x^n$.

Deux séries entières qui coincident au voisinage de 0 ont les mêmes coefficients.

Par unicité du DSE, on a donc $c_n = \dfrac{1}{2}4^{n+1}a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4^n}\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.