Interrogation n°25 bis

Exercice A (*Mines PSI 2002*) (♣)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On considère $\boxed{u_n = \prod_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right)}$. On note R le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

1) Dans chaque cas suivant, déterminer R et la somme de la série en précisant les valeurs de x où elle est définie :

i) $f(t) = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$; ii) $f(t) = \alpha t$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$; iii) $f(t) = pt - 1$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans le cas iii), exprimer u_n en fonction du coefficient binomial $\binom{p-1}{n}$.

2) a) Montrer que si $f(0) > 0$, alors u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.

b) Etudier la convergence de u_n si $|f(0)| < 1$.

c) Etudier la convergence de u_n si f strictement positive et $f(0) > 1$.

3) On suppose désormais f strictement positive et $f(0) = 1$. On pose $\beta = f'(0)$. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{n^\beta}$.

a) Etudier la convergence de la série $\sum w_n$, où $w_n = \ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right)$.

b) En déduire l'existence d'une constante $L > 0$ telle que $u_n \sim L\, n^\beta$.

c) Déterminer R et les valeurs de x pour lesquelles $F(x) = \sum u_n x^n$ est définie.

Exercice B. Fonction de Bessel (♣)

On considère la fonction définie par $\boxed{J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{1}{4^n (n!)^2} x^{2n}}$.

On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' + y' + xy = 0$.

1) Préciser la valeur de $J(0)$ et le rayon de convergence R de la série entière définissant J.

2) Montrer que J est l'unique fonction DSE en 0 solution de l'équation (E) et vérifiant $J(0) = 1$.

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $J(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix\cos\theta)\, d\theta$.

Exercice C

Soient $a_0 > ... > a_n$. On pose $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $L_k(X) = \prod_{j \neq k} \left(\dfrac{X - a_j}{a_k - a_j}\right)$.

On note E_n l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Ainsi, $L_k \in E_n$.

1) [1 pt] Soit $R \in E_{n-1}$ tels que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(-1)^k R(a_k) > 0$. Montrer que R est nul.

2) On souhaite affiner le résultat précédent.

a) [0.5 pt] Préciser le signe de $\mu_k = \prod_{j \neq k} (a_k - a_j)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

b) [2 pts] Soit $R \in E_{n-1}$ un polynôme de degré $\leq n-1$ tels que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $(-1)^k R(a_k) \geq 0$.

En exprimant R dans la base $(L_0, ..., L_n)$, montrer que $0 = \sum_{k=0}^n \dfrac{R(a_k)}{\mu_k}$. En déduire que R est nul.

3) [1 pt] (★) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

On suppose qu'il existe $P \in E_{n-1}$ et $n+1$ points $a_0 > ... > a_n$ dans $[0,1]$ vérifiant :

$$(f-P)(a_k) = (-1)^k \|f-P\|_\infty$$

Montrer que $\forall Q \in E_{n-1}$, $\|f-Q\|_\infty \geq \|f-P\|_\infty$, avec égalité ssi $Q = P$.

Indication : Supposer que $Q \in E_{n-1}$ vérifie $\|f-Q\|_\infty \leq \|f-P\|$.

Exercice D

Soient $d \in \mathbb{N}$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ **un polynôme réel de degré d à coefficients positifs**.

1) Montrer que $\boxed{f : x \longmapsto \exp(P(x))}$ est DSE en 0 de rayon $R = +\infty$ et à coefficients positifs.

I*ndication* : Utiliser des produits de séries entières.

2) On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Soit $x > 0$.

a) Justifier qu'il existe une variable aléatoire entière $X : \Omega \to \mathbb{N}$ dont la loi est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{b_n x^n}{f(x)}$$

b) Exprimer la série génératrice de X en fonction de f.

Exprimer $E(X)$ et $V(X)$ en fonction du polynôme P, puis en fonction des a_k et de x

3) Soit $(Y_k)_{0 \leq k \leq d}$ une famille de v.a. entières indépendantes telles que pour tout $k \in [\![0, d]\!]$,

$$Y_k \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(a_k x^k).$$

a) On considère la variable entière $Z = \sum_{k=0}^{d} k Y_k$. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

b) Calculer la série génératrice de Z et retrouver a) en utilisant 2) b).

Exercice E. Nombres de Catalan

On note c_n le nombre de parenthésages possibles d'une expression à l'aide de n parenthèses ouvrantes et n parenthèses fermantes (chaque parenthèse ouvrante précédant la parenthèse fermante qui lui est associée).

On vérifie (admis ici) que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $c_0 = 1$ et $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

1) Proposer un majorant de c_n et en déduire que la série entière $\sum c_n x^n$ admet un rayon $R > 0$.

2) Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = 1 + x f(x)^2$.

3) En déduire *avec* soin qu'il existe $r > 0$ tel que pour $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

4) On suppose *connu* le DSE de $\sqrt{1-u} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u^n$ défini pour $|u| < 1$.

En déduire la valeur de c_n en fonction des a_k. En déduire $\boxed{c_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}}$